EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

BETTI

FORZE

NEWTONIANE

PREFAZIONE

Nei volumi XVIII, XIX e XX della Prima Serie del *Nuovo Cimento* pubblicai, col titolo: *La Teorica delle Forze che agiscono secondo la legge di Newton e sua applicazione alla Elettricità statica,* una parte delle mie lezioni di Fisica Matematica date nella R. Università di Pisa nell'anno scolastico 1863-64. In seguito furono pubblicate sopra la stessa teorica le Opere postume: *Riemann; Schwere, Elektricität und Magnetismus; Lejeune Dirichlet; Vorlesungen über die in umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte,* e molti lavori di valenti matematici, ed io nella esposizione che ebbi occasione di farne altre volte nelle mie lezioni, approfittando di questi lavori e delle mie ricerche, potei migliorare le dimostrazioni ed estendere il campo delle applicazioni in modo da trovarmi in pronto la materia per un libro nuovo, che mi sono deciso a pubblicare, ritenendo che possa riuscire di qualche vantaggio a coloro che vogliono coltivare la Fisica Matematica.

Nella teorica pubblicata nel *Nuovo Cimento* aveva fondato i metodi della Elettrostatica sopra il teorema *Dirichlet-Riemann* circa alla esistenza di una funzione finita e continua insieme colle sue derivate prime, che in uno spazio di forma qualunque sodisfa alla equazione di *Laplace,* e prende valori dati comunque sul contorno. Dopo le osservazioni critiche fatte sopra le dimostrazioni di quel teorema in tutta la sua generalità, io ho creduto conveniente di abbandonare quei metodi. Ci potremo fondare nuovamente sopra quel teorema quando saranno rigorosamente determinati i limiti tra i quali sussiste.

Ho trattato più ampiamente la formula di *Green* che ha tanta importanza in questa teoria, ed ho determinato la modificazione che è necessaria affinchè possa dare i valori sopra il contorno.

Alle caratteristiche delle funzioni potenziali di masse a tre, a due e a una dimensione ho aggiunto quelle delle funzioni potenziali dei doppi strati tanto omogenei quanto eterogenei, per la importanza che questi hanno nelle teoriche del magnetismo e della elettrodinamica.

Ho determinato la funzione potenziale di una massa compresa tra due ellissoidi omotetiche quando la densità è costante in ogni strato compreso tra due ellissoidi omotetiche infinitamente vicine, col metodo della decomposizione in strati di livello che aveva dato nel *Nuovo Cimento*, e che aveva soltanto applicato alle masse omogenee. Generalizzando un teorema che comunicai all'Accademia dei Lincei nel 1875, ne ho dedotto la funzione potenziale non solo di un'ellisse omogenea, ma anche quella, data dal Professore *Dini*, di un'ellisse eterogenea nella quale la densità è costante in ogni striscia compresa tra due ellissi omotetiche infinitamente vicine.

Ho costruito la funzione potenziale di un'area piana omogenea valendomi delle sue caratteristiche e ne ho dedotto quelle dei poligoni, dei poliedri e dei cilindri retti omogenei.

Nel paragrafo che tratta dei Potenziali ho toccato anche della stabilità dei movimenti dei sistemi detti conservativi da *Thomson* e *Tait*, ed ho dimostrato che per la stabilità è necessario che la forza viva relativa media sia uguale alla metà del potenziale medio.

Ho dato le condizioni alle quali deve sodisfare una funzione potenziale affinchè il potenziale abbia un valore finito e valendomi del lavoro del Sig. *Christoffel: Zur Theorie der einwerthigen Potentiale* ho dimostrato che quando si verificano queste condizioni le masse alle quali appartiene la funzione potenziale non possono essere che a tre e a due dimensioni.

Per la importanza della considerazione delle linee di forza nello svolgimento dei concetti di *Faraday* e *Maxwell* ho aggiunto la teorica di queste linee, e con un processo analitico dato dal *Beltrami* per la determinazione delle linee di forza di un disco conduttore elettrizzato, ho determinato le linee di forza di un'ellissoide di rivoluzione.

Nella Elettrostatica alla materia trattata nella Teorica pubblicata nel *Nuovo Cimento* ho aggiunto la determinazione della distribuzione della elettricità in equilibrio sopra una callotta sferica. Mi son valso delle ricerche di *Lipschitz* esposte nella sua Memoria: *Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungs princips auf die Theorie der Vertheilung der Electricität* ed ho dimostrato tutti i risultati trovati da *Thomson*. Ne ho dedotto una espressione molto semplice della capacità elettrica di una callotta sferica, cioè che è uguale al rapporto a π della somma del raggio della base e dell'arco che la genera. Ne ho dedotto anche la funzione della elettricità indotta in un disco circolare in comunicazione colla Terra da un punto in cui è concentrata una massa di elettricità uguale ad uno, sotto la forma che *Beltrami* aveva trovata con altro metodo nel caso particolare che il punto inducente fosse sull'asse.

Maxwell nella sua opera *Electricity and Magnetism* ha applicato nella teorica dei condensatori una delle soluzioni dell'equazioni del moto permamente dei fluidi, corrispondenti a moti discontinui, trovate da *Helmholtz* e *Kirchoff*. Prendendo una soluzione più generale ho potuto determinare anche la influenza che nel fenomeno esercita la forma dei bordi.

Ho esposto anche la teorica che *Green* ha dato dei condensatori, ma dimostrando dentro quali limiti di approssimazione si può non tener conto, come fa *Green*, della elettricità che si trova sulle facce dei due strati conduttori che non sono in contatto col corpo coibente interposto.

Ho aggiunto poi la teorica del Magnetismo fondata sopra la ipotesi di *Poisson* e *Gauss*, cioè considerandolo come un caso di forze newtoniane. *Gauss* ha dimostrato come da questa ipotesi ne segue che se sopra la superficie di un corpo magnetico vi sono due poli dello stesso nome, vi dev'anch'essere un polo neutro. Io ho dimostrato che se la superficie è semplicemente connessa il numero dei poli è sempre pari.

Valendomi di un teorema d'*Iacobi* ho determinato i criteri circa alle distribuzioni solenoidale e lamellare degli assi e dei momenti magnetici considerate da *Thomson*, e ho dato due teoremi nuovi rispetto alla decomposizione di una distribuzione qualunque.

Secondo questa teoria le componenti della forza magnetica in un punto di un corpo magnetico presentano una indeterminatezza. Separando dal corpo magnetico uno spazio che contenga il punto nel suo interno e passando al limite col diminuire indefinitamente questo spazio, si hanno valori differenti secondo la forma del contorno e la direzione dell'asse. Ho determinato questi valori in generale e il potenziale che ne risulta. Nel caso della distribuzione lamellare conviene prendere per contorno di questo spazio un cilindro che abbia l'asse nella direzione dell'asse magnetico e le dimensioni delle basi infinitamente grandi rispetto all'altezza. Così la teorica dell'induzione non dà luogo alla difficoltà notata da *Maxwell* nella teorica di *Poisson* che prendeva quel contorno di forma sferica.

Finalmente ho applicato il metodo esposto per il Magnetismo alla teorica dei dielettrici e ne ho fatto col *Clausius* l'applicazione ai condensatori.

L' Autore.

CAPITOLO PRIMO

FUNZIONI POTENZIALI E POTENZIALI

§. I.

Funzione potenziale di un sistema qualunque di elementi materiali.

Le forze che agiscono secondo la legge di Newton sono quelle che emanano da ciascuno degli elementi infinitesimi di una data materia, e che tendono ad avvicinare oppure ad allontanare tra loro questi elementi, in ragione diretta delle loro masse e in ragione inversa dei quadrati delle loro distanze. Le prime sono forze attrattive, le seconde ripulsive. Una delle forze attrattive è la gravitazione universale, e una delle ripulsive è quella che si suppone tra le elettricità dello stesso nome.

Cominciamo dal determinare l'attrazione o la ripulsione che un aggregato di punti materiali esercita sopra un altro punto materiale qualunque.

Siano M_1, M_2, M_3 ... più punti materiali; μ_1, μ_2, μ_3 ... le loro masse rispettive, ed $(x_1\ y_1\ z_1)$, $(x_2\ y_2\ z_2)$ ... le loro respettive coordinate ortogonali. Sia O un punto materiale, di massa uguale alla unità. Siano (a, b, c) le coordinate del punto O; ed r_1, r_2, r_3 ... r_s.. le distanze rispettive dei punti M_1, M_2, M_3... M_s ... dal punto O. Avremo:

$$r_s^2 = (a - x_s)^2 + (b - y_s)^2 + (c - z_s)^2,$$

e l'attrazione o ripulsione esercitata da M_s sopra O sarà nella direzione r_s ed eguale a $\pm f\frac{\mu_s}{r_s^2}$, denotando con f la forza attrattiva o ripulsiva dell'unità di massa alla distanza 1; e dovremo prendere il segno — quando la forza è attrattiva o tende a diminuire r e il segno + quando è ripulsiva. Per semplicità prenderemo f per unità di forza; quindi l'azione attrattiva F_s, esercitata dal punto M_s sopra l'unità di massa in O, sarà data dalla espressione :

$$F_s = -\frac{\mu_s}{r_s^2}.$$

Denotando con α_s, β_s, γ_s gli angoli di r_s con i tre assi, avremo:

$$\cos\alpha_s = \frac{\partial r_s}{\partial a}, \ \cos\beta_s = \frac{\partial r_s}{\partial b}, \ \cos\gamma_s = \frac{\partial r_s}{\partial c}.$$

Pertanto se indichiamo con X, Y, Z le componenti della forza F esercitata dall'aggregato di tutti i punti M_s sopra il punto O, secondo i tre assi sarà:

$$X = -\Sigma\frac{\mu_s}{r_s^2}\frac{\partial r_s}{\partial a}, \ Y = -\Sigma\frac{\mu_s}{r_s^2}\frac{\partial r_s}{\partial b}, \ Z = -\Sigma\frac{\mu_s}{r_s^2}\frac{\partial r_s}{\partial c},$$

oppure:

$$X = \Sigma\frac{\partial}{\partial a}\frac{\mu_s}{r_s}, \ Y = \Sigma\frac{\partial}{\partial b}\frac{\mu_s}{r_s}, \ Z = \Sigma\frac{\partial}{\partial c}\frac{\mu_s}{r_s},$$

e ponendo:

$$V = \Sigma\frac{\mu_s}{r_s},$$

avremo:

$$X = \frac{\partial V}{\partial a}, \ Y = \frac{\partial V}{\partial b}, \ Z = \frac{\partial V}{\partial c}.$$

La funzione V delle coordinate del punto attratto (a, b, c) dipende dalla posizione e dalla massa dei punti M_s, e per mezzo di lei sola si può determinare l' azione del sistema. Ad essa è stato da *Gauss* dato il nome di *potenziale* e da *Green* quello di *funzione potenziale*. Noi adotteremo la denominazione di *Green*. Se i punti M_s riempiono uno spazio continuo il segno sommatorio diventa un integrale semplice, doppio o triplo, secondo che lo spazio è ad una, due o tre dimensioni; e se con ds, $d\sigma$, dS denotiamo rispettivamente gli elementi dello spazio a una, due, o tre dimensioni, e con ρ la densità, le masse μ_s divengono: ρds, $\rho d\sigma$, ρdS. Avremo dunque per la funzione potenziale di un corpo:

$$V = \int \frac{\rho dS}{r},$$

per quella di una superficie:

$$V = \int \frac{\rho d\sigma}{r},$$

e per quella di una linea:

$$V = \int \frac{\rho ds}{r},$$

essendo:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{1}$$

Consideriamo prima le proprietà della funzione potenziale in tutto lo spazio che non contiene massa attraente.

Se in generale denotiamo con $d\omega$ l'elemento dello spazio occupato dalla massa attraente, avremo:

$$V = \int \frac{\rho}{r} d\omega. \tag{2}$$

La funzione V sarà finita e continua in tutto lo spazio esterno a quello a cui si estende l' integrale, perchè ivi r non diviene mai uguale a zero. Se r_1 è il massimo ed r_2 è il minimo valore che prende r durante la integrazione, e se poniamo

$$M = \int \rho d\omega,$$

cioè se denotiamo con M la massa attraente totale, sarà:

$$\frac{M}{r_1} < V < \frac{M}{r_2}.$$

Quando O si allontana indefinitamente $\frac{M}{r_1}$ ed $\frac{M}{r_2}$ convergono a zero, quindi all' infinito la funzione potenziale si annulla.

Se l è il raggio vettore del punto O, avremo:

$$\frac{Ml}{r_1} < Vl < \frac{Ml}{r_2}.$$

Ma:

$$\lim_{l=\infty} \frac{l}{r_1} = \lim_{l=\infty} \frac{l}{r_2} = 1,$$

onde

$$\lim_{l=\infty} Vl = M$$

cioè il limite di Vl, per $l=\infty$, è eguale alla massa del corpo attraente; e inoltre al medesimo limite, cioè per $l=\infty$ si ha:
$Vl\cos A = Va = M\cos A$, $Vl \operatorname{sen} A \cos B = Vb = M \operatorname{sen} A \cos B$,

$$V\, l \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = Vc = M \operatorname{sen} A \cos B,$$

dove A e B denotano la colatitudine e la longitudine del raggio vettore l.

Dunque i prodotti della funzione potenziale per ciascuna delle coordinate del punto attratto si mantengono finiti, anche quando queste divengono infinite, e la quantità verso cui converge il prodotto della funzione potenziale per il raggio vettore, quando questo cresce infinitamente, è la massa del corpo attraente.

Derivando la (2) rapporto alle coordinate a, b, c, avremo:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int \frac{\rho(x-a)}{r^3} d\omega,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \int \frac{\rho(y-b)}{r^3} d\omega,$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \int \frac{\rho(z-c)}{r^3} d\omega.$$

Quindi le derivate prime di V si mantengono finite e continue in tutto lo spazio esterno alla massa attraente, perchè r non si annulla mai in tutto il corso della integrazione.

Osserviamo ora che si ha:

$$\frac{l^2}{r_1^2}\cos A\int\rho\frac{\cos\alpha}{\cos A}d\omega < \frac{\partial V}{\partial a}l^2 < \frac{l^2}{r_2^2}\cos A\int\rho\frac{\cos\alpha}{\cos A}d\omega$$

essendo α l'angolo che r fa coll'asse delle x.

Ma

$$\lim_{l=\infty}\frac{l^2}{r_1^2} = \lim_{l=\infty}\frac{l^2}{r_2^2} = 1, \quad \lim_{l=\infty}\frac{\cos\alpha}{\cos A} = 1$$

Dunque, per $l=\infty$, $\frac{\partial V}{\partial a}l^2$ converge verso la quantità finita $M\cos A$. Moltiplicando per i coseni degli angoli che l fa cogli assi, se ne deduce che $\frac{\partial V}{\partial a}a^2, \frac{\partial V}{\partial b}b^2, \frac{\partial V}{\partial c}c^2$, crescendo a, b, c infinitamente, convergono rispettivamente verso le quantità finite $M\cos^2 A, M\operatorname{sen}^2 A\cos^2 B, M\operatorname{sen}^2 A\operatorname{sen} B$.

Derivando nuovamente, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \int\rho\left(-\frac{1}{r^3}+3\frac{(x-a)^2}{r^5}\right)d\omega\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = \int\rho\left(-\frac{1}{r^3}+3\frac{(y-b)^2}{r^5}\right)d\omega\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \int\rho\left(-\frac{1}{r^3}+3\frac{(z-c)^2}{r^5}\right)d\omega\ ,$$

e sommando:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}=0\ ;$$

denotando per brevità con Δ^2 tale operazione, ossia ponendo:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{\partial^2}{\partial b^2}+\frac{\partial^2}{\partial c^2}\ ,$$

avremo il seguente teorema:

La funzione potenziale, e le sue derivate prime sono funzioni delle coordinate del punto attratto, finite e continue in tutto lo spazio esterno alla massa attraente; in questo spazio le derivate seconde sodisfano alla equazione:

$$\Delta^2 V = 0, \tag{3}$$

e quando il punto attratto va all'infinito la funzione V si annulla, il prodotto di essa per una coordinata qualunque del punto attratto converge verso una quantità finita, e i prodotti delle sue derivate prime rapporto alle coordinate del punto attratto moltiplicate per i quadrati di quelle medesime coordinate, convergono verso quantità finite.

§. II.

Trasformazione dell' espressione Δ^2.

Quando per determinare la posizione di un punto nello spazio, invece delle coordinate cartesiane, si prendono i parametri di tre sistemi di superficie ortogonali, la trasformazione di $\Delta^2 V$ si deduce immediatamente dalla forma che prende l'elemento lineare espresso per le nuove coordinate, per mezzo di una formula dovuta a *Lamé* e dimostrata in modo molto semplice da *Iacobi*.

Siano: x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane: ρ_1, ρ_2, ρ_3 le nuove coordinate.

Avremo:

$$dx_s = \Sigma_n \frac{\partial x_s}{\partial \rho_n} d\rho_n \, . \tag{1}$$

Se:

$$\Sigma_s \frac{\partial x_s}{\partial \rho_m} \frac{\partial x_s}{\partial \rho_n} = 0 \, , \tag{2}$$

e poniamo:

$$(3) \qquad \Sigma_s \left(\frac{\partial x_s}{\partial \rho_n}\right)^2 = \frac{1}{h_n^2} \ ,$$

avremo

$$ds^2 = \Sigma_s \, dx_s^2 = \Sigma_n \frac{d\rho_n^2}{h_n^2} \ .$$

Moltiplicando l'equazioni (1) rispettivamente per $\frac{\partial x_s}{\partial \rho_n}$, sommando ed osservando le (2) e le (3), abbiamo:

$$\frac{d\rho_n}{h_n^2} = \Sigma_s \frac{\partial x_s}{\partial \rho_n} dx_s \ ;$$

ma

$$\frac{d\rho_n}{h_n^2} = \frac{1}{h_n^2} \Sigma_s \frac{\partial \rho_n}{\partial x_s} dx_s \ ,$$

onde:

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial x_s} = h_n^2 \frac{\partial x_s}{\partial \rho_n} \ ,$$

e quindi, osservando le equazioni (2) e (3)

$$(4) \qquad \Sigma_s \frac{\partial \rho_m}{\partial x_s} \frac{\partial \rho_n}{\partial x_s} = 0$$

$$(5) \qquad \Sigma_s \frac{\partial \rho_n^2}{\partial x_s^2} = h_n^2$$

La equazione (4) esprime l'ortogonalità delle tre superficie.

Prendiamo ora a considerare l'integrale

$$\Omega = \int dS \, \Sigma_s \frac{\partial V^2}{\partial x_s^2} \ ,$$

dove V è una funzione finita e continua insieme colle sue derivate prime in tutto lo spazio S a cui si estende la integrazione. A cagione dell' equazioni (4) e (5), abbiamo

$$(6) \qquad \Sigma_s \frac{\partial V^2}{\partial x_s^2} = \Sigma_n h_n^2 \frac{\partial V^2}{\partial \rho_n^2} \ ,$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial x_2}{\partial \rho_2} \frac{\partial x_3}{\partial \rho_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \ ,$$

onde:

$$\Omega = \int\int\int dx_1 dx_2 dx_3 \, \Sigma_s \frac{\partial V^2}{\partial x_s^2} = \int\int\int \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{h_1 h_2 h_3} \, \Sigma_n h_n^2 \frac{\partial V^2}{\partial \rho_n^2}$$

Le variazioni prime delle due espressioni di Ω ridotte, per mezzo di una integrazione per parti, a contenere la sola variazione di V, si compongono di due parti: una che contiene le variazioni di V sopra la superficie che limita S; l'altra che contiene la variazione di V in tutto S. Poichè le variazioni nell'interno di S sono indipendenti da quelle alla superficie, queste parti della variazione dovranno essere identiche per le due espressioni di Ω. Quindi

$$\int\int\int dx_1 dx_2 dx_3 \delta V \Delta^2 V = \int\int\int \frac{d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3}{h_1 h_2 h_3} \delta V \Delta^2 V =$$

$$\int\int\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \, \delta \, V \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_3} \right) \right]$$

Questa uguaglianza dovendo sussistere qualunque sia la variazione di V in ciascun punto, dovremo avere

$$(7) \quad \Delta^2 V = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_3} \right) \right]$$

Ponendo

$$H_1 = \frac{1}{h_1} \, , \; H_2 = \frac{1}{h_2} \, , \; H_3 = \frac{1}{h_3}$$

avremo

$$ds^2 = \Sigma_s H_s^2 d\rho_s^2$$

$$(8) \quad \Delta^2 V = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_3} \right) \right]$$

Se prendiamo le coordinate polari, vale a dire il sistema triplo di superficie ortogonali: sfere concentriche di raggio r, coni circolari collo stesso asse e col vertice nel centro delle sfere, coll' angolo θ al vertice, e piani che passano per l'asse dei coni e fanno un angolo φ con uno di essi; avremo

$$\rho_1=r \ , \ \rho_2=\theta \ ; \ \rho_3=\varphi \ ,$$

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2 \ ,$$

onde:

$$H_1=1 \ , \ H_2=r \ , \ H_3=r\mathrm{sen}\theta \ ,$$

e quindi

$$(9) \quad \Delta^2 V=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial r^2\frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r}+\frac{\partial \mathrm{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}}{\mathrm{sen}\theta\,\partial\theta}+\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right]$$

Le componenti secondo le normali alle tre superficie ortogonali si otterranno moltiplicando le componenti secondo gli assi delle coordinate cartesiane per i coseni degli angoli che fanno le normali stesse coi rispettivi assi, e sommando. Chiamandole R, M, N, avremo:

$$R=\Sigma_s\frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{\partial \rho_1}{\partial x_s} \ ,$$

$$M=\Sigma_s\frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{\partial \rho_2}{\partial x_s} \ ,$$

$$N=\Sigma_s\frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{\partial \rho_3}{\partial x_s} \ .$$

Sostituendovi i valori che danno le derivate rispetto alle x espressi per quelle rispetto alle ρ, ed osservando le equazioni (4) e (5) si ottiene:

$$R=h_1\frac{\partial V}{\partial\rho_1} \ , \ M=h_2\frac{\partial V}{\partial\rho_2} \ , \ N=h_3\frac{\partial V}{\partial\rho_3}.$$

Per le coordinate polari abbiamo:

$$R=\frac{\partial V}{\partial r} \ , \ M=\frac{\partial V}{r\partial\theta} \ , \ N=\frac{\partial V}{r\mathrm{sen}\theta\,\partial\varphi}.$$

La prima è la componente secondo il raggio vettore, la seconda è nella direzione della tangente alla sfera secondo un meridiano, la terza pure tangente alla sfera ma normale al meridiano.

§. III.

Funzione potenziale di una massa omogenea compresa tra due sfere concentriche.

Abbiasi una massa di densità ρ costante compresa fra due superficie sferiche concentriche, di raggio R l'esterna e di raggio R_0 l'interna; siano: r, θ, φ le coordinate polari del punto attratto O, e il polo sia nel centro delle sfere. Per ragion di simmetria è chiaro che la funzione potenziale avrà lo stesso valore per tutti i punti alla stessa distanza dal centro delle sfere; quindi la funzione potenziale V sarà una funzione della sola r e l'equazione $\Delta^2 V=0$, osservando la equazione (9) del paragrafo precedente, darà:

$$\frac{\partial r^2 \frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r}=0,$$

e integrando:

$$V=\frac{c}{r}+c'.$$

Per i punti esterni ad ambedue le sfere la funzione potenziale deve essere una funzione finita e continua che si annulla per $r=\infty$. Quindi per questi punti avremo $c'=0$, e denotando con V_e la funzione potenziale relativa a un punto esterno e, sarà:

$$V_e=\frac{c}{r}.$$

Per i punti e' interni ad ambedue le sfere la funzione potenziale $V_{e'}$ deve esser sempre finita anche per $r=0$, quindi dovrà essere $c=0$ e avremo:

$$V_{e'}=c'.$$

Onde nei punti interni ad ambedue le sfere la funzione potenziale è costante, e le sue derivate sono nulle, e perciò le componenti dell' azione attrattiva sono nulle in questi punti. Nel centro delle due sfere abbiamo, $x=0$, $y=0$, $z=0$, quindi:

$$V_{i'}=c'=\rho\int\int\int\frac{dx'dy'dz'}{r}=\rho\int_{R_0}^{R}r'dr'\int_0^{\pi}\text{sen}\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}d\varphi'$$

$$=2\pi\rho(R^2-R_0^2)$$

$$(1)\qquad V_{i'}=2\pi\rho(R^2-R_0^2).$$

Per $r=\infty$, deve essere, per quello che abbiamo dimostrato nel §. I:

$$V r=M=\frac{4\pi}{3}\rho(R^3-R_0^3)=c;$$

onde:

$$c=\frac{4\pi\rho}{3}(R^3-R_0^3)\ ;$$

$$(2)\qquad V_e=\frac{4\pi\rho}{3r}(R^3-R_0^3)=\frac{M}{r},$$

indicando con M la massa dell' involucro.

Per determinare la funzione potenziale per un punto i che fa parte dell' involucro sferico, osserviamo che V_i è la somma di due funzioni potenziali, cioè della funzione potenziale dell' involucro limitato dalle sfere di raggio R ed r, e della funzione potenziale dell' involucro limitato dalle sfere di raggio r ed R_0. La prima di queste funzioni è:

$$2\pi\rho(R^2-r^2);$$

e la seconda:

$$\frac{4\pi\rho}{3r}(r^3-R_0^3)\ ;$$

dunque sarà:

$$V_i = 2\pi\rho R^2 - 2\rho \frac{\pi}{3} r^2 - \frac{4\pi\rho R_0^3}{3r}. \tag{3}$$

Per avere la funzione potenziale di una sfera basterà porre $R_0 = 0$ e avremo:

$$V_e = \frac{4\pi\rho R^3}{3r} = \frac{M}{r}, \tag{4}$$

$$V_i = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2. \tag{5}$$

L' equazioni (2) e (4) danno il seguente teorema: L'azione di un involucro sferico, o di una sfera, sopra un punto esterno, è eguale a quella che eserciterebbe il centro delle due sfere, o della sfera, quando in esso fosse concentrata tutta la massa dell' involucro, o della sfera. Dalla equazione (4) si ricava che l' azione sopra un punto della superficie della sfera è $-\frac{4}{3}\pi\rho R$; dunque l' azione attrattiva esercitata da una sfera sopra un punto della sua superficie è proporzionale al suo raggio. Dalla (5) si rileva che l' azione sopra un suo punto interno è uguale a quella che si avrebbe se non esistesse la massa dell'involucro sferico che lo circonda.

Le tre espressioni della funzione potenziale di un involucro sferico relative ai punti esterni ed interni all' involucro e a quelli che ne fanno parte, si continuano senza interruzione l'una nell' altra e formano una sola funzione continua. Infatti abbiamo:

Per $r = R$,
$$V_e = \frac{4\pi\rho R^2}{3} - \frac{4}{3}\frac{\pi\rho R_0^3}{R},$$

$$V_i = \frac{4\pi\rho R^2}{3} - \frac{4}{3}\frac{\pi\rho R_0^3}{R};$$

per $r = R_0$,
$$V_i = 2\pi\rho(R^2 - R_0^2),$$

$$V_i' = 2\pi\rho(R^2 - R_0^2).$$

Lo stesso accade delle tre derivate rapporto ad r delle tre espressioni della funzione potenziale. Infatti:

Per $r=R$,
$$\frac{\partial V_e}{\partial r}=-\frac{4}{3}\pi\rho R \ ,$$
$$\frac{\partial V_i}{\partial r}=-\frac{4}{3}\pi\rho R \ ,$$

per $r=R_0$,
$$\frac{\partial V_i}{\partial r}=0 \ ,$$
$$\frac{\partial V_e}{\partial r}=0 \ .$$

Lo stesso avrà luogo per le derivate rapporto ad x, y, z che si ottengono da queste moltiplicandole rispettivamente per $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$.

Le derivate seconde delle tre espressioni della funzione potenziale non si continuano una nell'altra, e nel passare dall'esterno all'interno, e viceversa, offrono due discontinuità. Esse sono:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial r^2}=\frac{8\pi\rho}{3r^3}(R^3-R_0^3) \ ,$$
$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2}=-\frac{4}{3}\pi\rho-\frac{8\pi\rho R_0^3}{3r^3} \ ,$$
$$\frac{\partial^2 V_e'}{\partial r^2}=0,$$

e per $\rho=R$ si ha:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial r^2}=\frac{8}{3}\pi\rho-\frac{8}{3}\pi\rho\frac{R_0^3}{R^3} ,$$
$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2}=-\frac{4}{3}\pi\rho-\frac{8}{3}\pi\rho\frac{R_0^3}{R^3} ;$$

e quindi:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2}=4\pi\rho \ .$$

Per $r=R_0$:

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2}=-4\pi\rho \;,\; \frac{\partial^2 V_{e'}}{\partial r^2}=0,$$

e quindi:

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 V_{e'}}{\partial r^2}=-4\pi\rho;$$

dunque nel passare dall' interno all' esterno dell' involucro sferico, le derivate seconde variano bruscamente di $4\pi\rho$.

Essendo V funzione soltanto di r abbiamo dalla equazione (9) del paragrafo precedente:

$$\Delta^2 V_i=\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r^2\frac{\partial V_i}{\partial r}}{\partial r},$$

e ponendo invece di V_i il suo valore (3)

$$\Delta^2 V_i=-\frac{\rho\pi}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4}{3}r^3-\frac{4}{3}R_0^3\right)=-4\pi\rho.$$

§. IV.

Funzione potenziale di una superficie sferica omogenea.

Determiniamo ora la funzione potenziale d' una massa attraente distribuita uniformemente sopra una superficie sferica. È chiaro che a cagione della simmetria intorno al centro, la funzione potenziale sarà una funzione del solo raggio vettore del punto attratto, e quindi prendendo le coordinate polari: r,θ,φ e il polo nel centro, sarà:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0,$$

e l' equazione:

$$\Delta^2 V=0,$$

darà;

$$\frac{\partial r^2 \frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r}=0$$

ossia:

$$V=\frac{c}{r}+c'.$$

Per i punti esterni alla sfera dobbiamo avere per $r=\infty$, $V=0$, onde $c'=0$. Deve essere inoltre:

$$\lim Vr=M=4\pi\rho R^2,$$

denotando con R il raggio della sfera e con ρ la densità costante. Quindi la funzione potenziale nei punti esterni sarà:

$$V_e=\frac{4\pi\rho R^2}{r}.$$

Per la funzione potenziale $V_{e'}$ nei punti interni basta osservare che deve essere sempre finita, quindi anche per $r=0$; dunque sarà:

$$V_{e'}=c'.$$

Per determinare c' basta dunque che si determini $V_{e'}$ per un solo punto interno, per esempio, il polo. Abbiamo allora:

$$V_{e'}=\rho R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta=4\pi\rho R,$$

onde:

$$V_{e'}=4\pi\rho R$$

Si vede che per $r=R$ i due valori della funzione potenziale nei punti interni ed esterni coincidono, dunque la funzione potenziale è finita e continua in tutto lo spazio.

Abbiamo poi:

$$\frac{\partial V_e}{\partial r}=-\frac{4\pi R^2\rho}{r^2}, \quad \frac{\partial V_i}{\partial r}=0.$$

Onde:

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right)_{r=R}-\left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_{r=R}=-4\pi\rho.$$

Le derivate prime prese secondo la normale alla superficie nel passare dall' esterno all' interno variano bruscamente di $4\pi\rho$; dunque le derivate prime sono funzioni sempre finite, ma discontinue nel passare attraverso alla superficie.

§. V.

Funzione potenziale di una linea retta omogenea.

La funzione potenziale di una linea retta di lunghezza l, sopra cui è distribuita una massa di densità costante ρ, se prendiamo per asse delle z la retta, l'origine in una estremità di essa e poniamo

$$t^2=a^2+b^2$$

sarà:

$$V=\rho\int_0^l\frac{dz}{\sqrt{(z-c)^2+t^2}}$$

$$=\rho\log\frac{l-c+\sqrt{(l-c)^2+t^2}}{-c+\sqrt{c^2+t^2}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore della quantità sotto il segno logaritmico per $c+\sqrt{c^2+t^2}$, si ottiene

$$V=2\rho\log\frac{1}{t}+\rho\log(r_1+l-c)+\rho\log(c+r_0)$$

essendo r_1 ed r_0 le distanze del punto attratto dalle estremità della retta.

Derivando rapporto a t e a c avremo:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{2\rho}{t}+\rho t\left(\frac{1}{r_1(r_1+l-c)}+\frac{1}{r_0(r_0+c)}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial c}=\rho\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Quindi tanto V quanto la sua derivata prima rapporto a t divengono infinite per $t=0$, ed abbiamo

$$\lim_{t=0} \frac{V}{\log t} = -2\rho$$

$$\lim_{t=0} t \frac{\partial V}{\partial t} = -2\rho$$

La derivata rapporto a c si conserva finita e continua in tutto lo spazio fuori che nelle estremità della retta, dove diviene infinita come $\frac{\rho}{t}$ per $t=0$.

§. VI.

Funzione potenziale nello spazio occupato dalla massa attraente.

Abbiamo veduto nel §. I. che la funzione potenziale V di una massa di forma qualunque, di densità costante o variabile, e le sue derivate prime sono funzioni delle coordinate: a, b, c del punto attratto O, le quali si mantengono finite e continue, finchè O rimane nello spazio esterno alla massa. Consideriamola ora nello spazio occupato dalla massa attraente. Se questa è un corpo a tre dimensioni, avremo

$$V = \int \frac{\rho dS}{r}$$

e se prendiamo le coordinate polari col polo nel punto attratto, r sarà il raggio vettore di un punto qualunque al quale si riferisce la integrazione, e denotando con θ e φ la colatitudine e la longitudine, otterremo

$$dS = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

e quindi

$$V = \int\int\int \rho \, r \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

che ha evidentemente sempre un valore finito, perchè la quantità da integrarsi non diviene mai infinita, neppure quando r passa per zero. Dunque la funzione potenziale di un corpo è finita in tutto lo spazio, anche in quello occupato dal corpo.

Ora sia m un punto del corpo ed m' un altro punto esterno od interno al corpo stesso: la distanza di m' da m sia 2ε. Descriviamo col centro nel punto di mezzo della retta che unisce m con m' una sfera s di raggio ε, che passerà per m e per m'. Denotiamo con S' tutto lo spazio occupato dalla massa attraente meno lo spazio occupato dalla sfera s, e denotiamo con v e V' le funzioni potenziali delle masse che occupano s ed S'; avremo:

$$V=v+V'$$

Distinguendo cogl' indici m ed m' i valori di V, v e V' nei punti m ed m', sarà:

$$V_m-V_{m'}=v_m-v_{m'}+V'_m-V'_{m'}$$

Ora, se ρ_0 è il massimo valore di ρ nella sfera s, ed s' la porzione di s che è occupata dalla massa attraente, sarà s' uguale ad s quando m' è interno al corpo, ed ε sufficientemente piccolo; sarà s' minore di s quando m' è nello spazio esterno al corpo. In ogni caso però avremo

$$v_m=\int_{s'}\rho\frac{ds}{r}<\rho_0\int_{s}\frac{ds}{r}=\frac{4}{3}\pi\rho_0\varepsilon^2$$

$$v_{m'}=\int_{s'}\rho\frac{ds}{r}<\rho_0\int_{s}\frac{ds}{r}=\frac{4}{3}\pi\rho_0\varepsilon^2$$

onde

$$v_m-v_{m'}<\frac{4\pi\rho_0\varepsilon^2}{3}$$

quindi

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(v_m-v_{m'}\right)=0$$

Ma la retta che unisce m ad m' essendo tutta nello spazio esterno ad S', avremo anche

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(V'_m-V'_{m'}\right)=0$$

onde

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(V_m - V_{m'}\right)=0 \;.$$

Dunque la funzione potenziale di un corpo è continua in tutto lo spazio, anche nello spazio interno alla massa attraente e nel passaggio dallo spazio interno all'esterno.

Se la massa attraente ha due sole dimensioni, cioè quando si tratta della funzione potenziale di una superficie σ, conduciamo dal punto attratto m una retta che attraversi la superficie σ in un punto o. Prendiamo o per origine delle coordinate, e per asse delle z la retta om. Sia γ l'angolo che la normale in un punto qualunque di σ fa coll'asse delle z. Descriviamo sopra la superficie σ una curva chiusa C, che dividerà la superficie stessa in due parti. Sia s la parte che contiene o, σ' l'altra, e si prenda C tale che per tutte le normali condotte nei punti di s, γ non sia mai uguale a 90^0. Siano v e V' rispettivamente le funzioni potenziali di s e di σ', avremo:

$$V=v+V'$$

Poniamo:

$$x=t\cos\theta \;,\; y=t\,\mathrm{sen}\,\theta$$

sarà:

$$\cos\gamma ds = t dt d\theta$$

$$r^2=(z-c)^2+t^2$$

e quindi

$$v=\int_s \frac{\rho ds}{r}=\int\int\frac{\rho}{\cos\gamma}\frac{dt\,d\theta}{\sqrt{1+\frac{(z-c)^2}{t^2}}}$$

che ha evidentemente un valore sempre finito, anche quando il punto m è in o, perchè la quantità sotto il segno integrale non diviene mai infinita. Anche la funzione V' ha un valore finito in o perchè o è esterno alla massa di cui V' è funzione potenziale. Dunque in generale la funzione potenziale V di una superficie σ

è sempre finita anche in tutti i punti della superficie stessa.

Siano m ed m' due punti dell' asse delle z, uno dall'una, l'altro dall'altra parte di σ. Sia $\frac{\rho_0}{\cos\gamma_0}$ il massimo valore di $\frac{\rho}{\cos\gamma}$ in s, ε il massimo valore di t, avremo

$$v_m < \frac{2\pi\rho_0}{\cos\gamma_0}\varepsilon \quad , \quad v_{m'} < \frac{2\pi\rho_0}{\cos\gamma_0}\varepsilon$$

onde

$$v_m - v_{m'} < \frac{2\pi\rho_0}{\cos\gamma_0}\varepsilon$$

Avvicinando indefinitamente m ad m' e contemporaneamente restringendo la curva C, ε diminuirà indefinitamente, e quindi il secondo membro si può rendere più piccolo di qualunque quantità data. Dunque v è continua nell'attraversare la superficie; è pure continua V' perchè o è esterno alla massa a cui si riferisce, dunque sarà continua anche V, e quindi in generale la funzione potenziale di una superficie è continua in tutto lo spazio, anche nel passare da una all'altra parte della superficie stessa.

Mentre le funzioni potenziali di masse a tre e a due dimensioni si conservano a un sol valore, finite e continue in tutto lo spazio, le funzioni potenziali di masse a una sola dimensione, cioè le funzioni potenziali di linee divengono infinite nei punti occupati dalla massa attraente. Infatti, consideriamo una linea s, e un punto o sopra la medesima. Conduciamo per o una tangente ad s. Prendiamo sopra s due punti d e d' tra i quali sia compreso il punto o, e denotiamo con W la funzione potenziale della porzione di linea dd', e con V la funzione potenziale della proiezione di dd' sopra la tangente in o, carica di una massa di densità ρ_0 uguale alla densità della linea dd' nel punto o. Prendiamo per asse delle z la tangente in o, e siano $z=h$, $z=h'$, le distanze delle proiezioni di d e di d' sopra l'asse z dall'origine. Avremo

$$W - V = \int_h^{h'} dz\left(\frac{\rho}{r\cos\lambda} - \frac{\rho_0}{R}\right)$$

essendo λ l'angolo che la tangente alla linea in un punto qualunque n fa coll'asse delle z, r la distanza del punto attratto da n, ed R la distanza di questo dalla proiezione di n sopra l'asse delle z.

Ora la quantità sotto il segno integrale si mantiene sempre finita finchè il punto attratto è a distanza finita dalla linea, ma quando è in o nell'elemento dell'integrale, corrispondente a questo punto abbiamo:

$$r = \mathrm{R} = 0$$

e quindi $\infty - \infty$. Si dimostra però facilmente che anche in questo caso la quantità sotto il segno integrale è finita. Infatti se il punto attratto m è nel piano normale alla linea nel punto o, e se prendiamo per asse delle x la retta mo, e denotiamo con t la distanza di m da o, avremo:

$$\frac{z}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{z^2}}}, \quad \frac{z}{r} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}-\frac{t}{z}\right)^2+\frac{y^2}{z^2}}}$$

ed essendo l'asse delle z tangente alla linea nel punto o, sarà

$$\lim_{z=0} \frac{x}{z} = \frac{\partial n}{\partial z} = 0, \quad \lim_{z=0} \frac{y}{z} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

onde:

$$\lim_{z=0} \frac{z}{r} = \lim_{z=0} \frac{z}{\mathrm{R}} = \lim_{z=0} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{z^2}}}$$

quantità sempre finita anche per $t=0$. Avremo dunque

$$\lim_{z=0}\left(\frac{\rho}{r\cos\lambda} - \frac{\rho_0}{\mathrm{R}}\right) = \lim_{z=0} \frac{z}{\mathrm{R}} \frac{\left(\frac{\rho}{r\cos\lambda} - \rho_0\right)}{z} = \lim_{z=0} \frac{\mathrm{R}}{z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho}{\cos\lambda}$$

Ma per $z=0$, è $\lambda=0$, quindi se $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$ è una quantità finita sarà per questo valore di z

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_1}{\cos\lambda} = \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Dunque se la derivata di ρ è finita, sarà finita la quantità sotto il segno integrale nel punto o, anche quando $t=0$.

Quindi $W-V$ ha un valore finito nel punto o, e dividendo per $\log t$, avremo

$$\lim_{t=0}\left(\frac{W}{\log t}-\frac{V}{\log t}\right)=0\ .$$

Ma nel §. V abbiamo trovato

$$\lim_{t=0}\frac{V}{\log t}=-2\rho\ ,$$

dunque la funzione potenziale di una linea sodisfa all'equazione

$$\lim_{t=0}\frac{W}{\log t}=-2\rho\ .$$

Questo teorema vale anche se la linea ha un numero finito di vertici. Infatti se o è un vertice, e nella dimostrazione precedente si prende in luogo del punto d il punto o, basterà che per quanto ci si avvicini al punto o siano determinata la tangente, e finita la derivata di ρ perchè se ne possano trarre le medesime conseguenze.

§. VII.

Derivate prime della funzione potenziale di un corpo.

Se V ed U sono due funzioni finite, continue, a un sol valore e ammettono una derivata determinata e finita in tutto uno spazio S limitato da una o più superficie σ, σ', σ'',..., integrando per parti, otterremo:

$$\int\int\int V\frac{\partial U}{\partial x}dxdydz=\int\int(VU\ dydz)-\int\int\int U\frac{\partial V}{\partial x}\ dxdydz$$

dove la quantità tra parentesi sotto l' integrale doppio dev'essere limitata ai tratti paralleli all' asse delle x compresi nello spazio S. Per ottenere questa limitazione, essendo VU quantità sempre finita e continua in S, si dovranno prendere le differenze dei valori che VU riceve nei punti delle superficie $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ che limitano lo spazio S, quando un punto che si muova parallelamente all'asse delle x nella direzione negativa entra nello spazio S, e quelli che prende la stessa quantità quando il punto esce dal medesimo spazio. Avremo dunque distinguendo con indici pari i valori di entrata, e con indici dispari quelli di uscita:

$$\int\int\left(\mathrm{VU}dydz\right)=\Sigma_i\left[\int\int(\mathrm{VU})_{2i}dy_{2i}\,dz_{2i}-\int\int(\mathrm{VU})_{2i+1}dy_{2i+1}dz_{2i+1}\right]$$

Ora denotando con $d\sigma$ l'elemento di superficie e con α l'angolo che la normale a quell'elemento diretta verso l'interno di S fa coll' asse delle x, avremo

$$\cos\alpha\, d\sigma = \pm\, dydz$$

dove gli elementi superficiali essendo essenzialmente positivi dovrà prendersi il segno $+$ se α è acuto, il segno $-$ se α è ottuso. Ma quando il punto che si muove nella direzione negativa dell'asse delle x entra in S, α è ottuso, quando esce è acuto, onde avremo:

$$\int\int\left(\mathrm{VU}\,dy\,dz\right)=-\Sigma_i\int \mathrm{V}_i\mathrm{U}_i\cos\alpha_i\, d\sigma_i$$

Ma nella integrazione a tutto lo spazio S ciascuno elemento delle superficie σ, è incontrato una volta, e una volta soltanto dalle rette parallele all' asse delle x, quindi avremo:

$$\int\int\left(\mathrm{VU}dydz\right)=-\int \mathrm{VU}\cos\alpha d\sigma$$

e l' integrale del secondo membro dovrà estendersi a tutte le superficie σ. Abbiamo quindi

$$(1)\qquad \int_{\mathrm{S}}\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\mathrm{S}=-\int_\sigma \mathrm{VU}\cos\alpha\, d\sigma-\int_{\mathrm{S}}\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}d\mathrm{S}$$

Se la funzione U diviene infinita in un punto m' dello spazio S, in modo però che denotando al solito con r la distanza del punto di coordinate: x, y, z da m', ed essendo μ uguale a un determinato numero positivo e finito, le due funzioni

$$r^{3-\mu}\,\mathrm{U}\ ,\ r^{3-\mu}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$$

si conservino finite anche nel punto m', seguiterà sempre a sussistere l' equazione (1).

Infatti, se descriviamo col centro nel punto m' e col raggio ε una sfera s, denotiamo con τ la superficie di questa e con S′ lo spazio che rimane togliendo dallo spazio S la sfera s, avremo:

$$(2)\quad \int_{\mathrm{S}'}\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\partial \mathrm{S}=-\int_{\sigma}\mathrm{VU}\cos\alpha d\sigma-\int_{\tau}\mathrm{VU}\cos\alpha d\tau-\int_{\mathrm{S}'}\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}d\mathrm{S}'$$

Ora osserviamo che si ha:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{s}\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\,ds=\lim_{\varepsilon=0}\int_{\omega}\int_{0}^{\varepsilon^{\mu}}\mathrm{V}\left(r^{3-\mu}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)\frac{d(r^{\mu})}{\mu}d\omega=0$$

essendo ω la superficie della sfera di raggio uguale alla unità.

Quindi

$$(3)\quad \lim_{\varepsilon=0}\int_{\mathrm{S}'}\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\mathrm{S}'=\int_{\mathrm{S}}\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}ds-\lim_{\varepsilon=0}\int_{s}\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}ds=\int_{\mathrm{S}}\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\mathrm{S}$$

Abbiamo inoltre

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{s}\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}ds=\lim_{\varepsilon=0}\int_{\omega}\int_{0}^{\varepsilon^{\mu}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\left(r^{3-\mu}\mathrm{U}\right)\frac{d(r^{\mu})}{\mu}d\omega=0$$

onde:

$$(4)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{\mathrm{S}'}\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}d\mathrm{S}'=\int_{\mathrm{S}}\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,d\mathrm{S}$$

Finalmente

(5) $$\lim_{\varepsilon=0}\int_\tau \mathrm{VU}\cos\alpha d\tau = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon^{\mu} \int_\omega \cos\alpha \mathrm{V}\left(r^{2-\mu}\mathrm{U}\right) d\omega = 0$$

L'equazioni (3), (4) e (5) dimostrano che al limite per $\varepsilon=0$, la equazione (2) diviene identica alla equazione (1), e nel caso considerato, questa equazione sussiste sempre, come volevamo dimostrare.

Poniamo ora

$$\mathrm{U}=\frac{1}{r}$$

e prendiamo per V la funzione che esprime la densità ρ di una massa distribuita nello spazio S, e con V denotiamo la funzione potenziale di questa massa. Poichè

$$r\mathrm{U}=1\ ,\quad r^2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}=\frac{x'-x}{r}$$

potremo applicare la equazione (1), tanto se il punto m' si trova fuori dello spazio S, quanto se è in questo spazio, ed avremo:

$$\int_{\mathrm{S}} \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\mathrm{S} = -\int_\sigma \frac{\rho\cos\alpha}{r} d\sigma - \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{d\mathrm{S}}{r}$$

Onde

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'} = \int_\sigma \frac{\rho\cos\alpha}{r} d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{d\mathrm{S}}{r}$$

e due espressioni analoghe per le altre due derivate.

Ora il secondo membro è composto di due funzioni potenziali; la prima è la funzione potenziale delle superficie σ sopra le quali la densità è $\rho\cos\alpha$, la seconda è la funzione potenziale di un corpo che occupa lo spazio S ed ha per densità $\frac{\partial \rho}{\partial x}$. Quindi se le derivate di ρ sono determinate e finite, queste due funzioni potenziali per il paragrafo antecedente, si conservano finite e continue in tutto lo spazio. Dunque le derivate prime della funzione potenziale di un corpo sono funzioni finite e continue in tutto lo spazio. Questo teorema si può anche dimostrare in modo analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente per dimostrare che la funzione potenziale di un corpo è sempre finita e continua, senza che sia necessario supporre che ρ abbia le derivate prime sempre determinate e finite.

§. VIII.

Derivate prime della funzione potenziale di una superficie.

Le derivate prime della funzione potenziale di una superficie σ, si conservano finite e continue in tutto lo spazio esterno alla massa attraente. Quando però si attraversa la superficie offrono una discontinuità, come abbiamo veduto nel caso di una superficie sferica nel §. III. Per determinarla conduciamo per un punto o di σ una normale a σ, prendiamo o per origine, e la normale per asse delle z, e consideriamo il punto attratto situato sulla normale prima in a da una parte poi in b dall' altra parte della superficie. Descriviamo sopra σ una curva C intorno al punto o, e denotiamo con v la funzione potenziale della porzione s di superficie racchiusa da C, e con V' la funzione potenziale della rimanente superficie σ'. Avremo

$$V=v+V'$$

Distinguiamo cogli indici a e b i valori di queste funzioni relativi ad a e a b: avremo:

$$\frac{\partial V_a}{\partial z}=\frac{\partial v_a}{\partial z}+\frac{\partial V'_a}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V_b}{\partial z}=\frac{\partial v_b}{\partial z}+\frac{\partial V'_b}{\partial z}$$

Passando al limite coll' avvicinarsi indefinitamente di a e di b al punto o avremo

$$\frac{\partial V'_a}{\partial z} = \frac{\partial V'_b}{\partial z}$$

perchè le derivate di V' sono continue nell' attraversare la superficie in o che è esterno alla massa a cui si riferisce V'. Onde

$$(1) \qquad \frac{\partial V_a}{\partial z} - \frac{\partial V_b}{\partial z} = \frac{\partial v_a}{\partial z} - \frac{\partial v_b}{\partial z}$$

Ora

$$\frac{\partial v_b}{\partial z} = -\int_s \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} d\sigma = \int_s \frac{\rho}{r^2} \cos rz\, d\sigma$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial z} = \rho_0 \int_s \frac{d\sigma}{r^2} \cos rn + \int_s \frac{d\sigma}{r^2} \Big[\rho \cos rz - \rho_0 \cos rn\Big]$$

denotando con ρ_0 la densità nel punto o.

Se α, β, γ sono i coseni degli angoli che la normale alla superficie σ fa cogli assi, abbiamo

$$\cos rn = \frac{\alpha x' + \beta y' + \gamma (z' - z)}{r}$$

$$\cos rz = \frac{z' - z}{r}$$

onde:

$$(2) \qquad \frac{\partial v_a}{\partial z} = \rho_0 \int_s \frac{\cos nr}{r^2} d\sigma + \int_s \frac{d\sigma}{r^3} \Big[(\rho - \rho_0 \gamma)(z' - z) - \rho_0 (\alpha x' + \beta y')\Big]$$

Ma se descriviamo col centro in a e col raggio r una sfera, e chiamiamo $d\Sigma$ l'elemento di questa sfera intercettato dal cono che ha per vertice il punto a e per base l'elemento $d\sigma$, sarà

$$d\sigma \cos nr = \pm\, d\Sigma$$

Se col centro in a descriviamo una sfera di raggio 1, e denotiamo con $d\omega$ l'elemento corrispondente a $d\Sigma$; avremo:

$$\frac{d\Sigma}{r^2} = d\omega$$

onde:

$$\int_s \frac{\cos nr}{r^2}\, d\sigma = \pm \int_s d\omega = \pm\, \omega$$

dove ω è la porzione di sfera di raggio uguale alla unità, intercettata dal cono che ha il vertice in a, e per base s, e si deve prendere il segno: — se l'angolo rn è ottuso, e il segno: + se rn è acuto. Passando al limite, coll' avvicinarsi indefinitamente del punto a al punto o la grandezza apparente ω di s converge alla semisfera, ossia a 2π. Dunque, se prendiamo per direzione positiva della normale quella da o verso a, avremo

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\lim \int_s \frac{\cos nr}{r_a^2}\, d\sigma = -2\pi \\ &\lim \int_s \frac{\cos nr}{r_b^2}\, d\sigma = 2\pi \end{aligned}$$

Per determinare il limite verso cui converge l' altro integrale, coll'avvicinarsi indefinitamente del punto a al punto o, prendiamo

$$x' = t\cos\theta \;,\; y' = t\,\mathrm{sen}\theta$$

poichè

$$\alpha = -\frac{\partial z'}{\partial x'}\gamma \qquad \beta = -\frac{\partial z'}{\partial y'}\gamma$$

avremo:

$$\alpha x' + \beta y' = -\gamma\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}x' + \frac{\partial z'}{\partial y'}y'\right) = -\gamma t \frac{\partial z'}{\partial t}$$

Se è finita la curvatura della superficie in s, avremo

$$z' = mt^2, \ \frac{\partial z'}{\partial t} = m_1 t$$

essendo m ed m_1 quantità finite. Quindi

$$(4) \quad \int_s \frac{\rho_0(\alpha x' + \beta y')d\sigma}{r^3} = -\int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 m_1 t^3 dt d\theta}{r^3} = -\int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 m_1 \, dt \, d\theta}{\left[1+\left(\frac{z'-z}{t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

che col diminuire di s evidentemente converge a zero.

Osserviamo ora che essendo finita la curvatura in s, abbiamo

$$\gamma = 1 - nt$$

essendo n una quantità sempre finita; quindi

$$\rho - \rho_0\gamma = \left(\frac{\rho - \rho_0}{t} + n\rho_0\right)t$$

ed è chiaro che l' integrale

$$\int_s \frac{(\rho - \rho_0\gamma)}{r} \frac{z'-z}{r^3} d\sigma = \int_0^t \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho-\rho_0}{t} + n\rho_0\right)\frac{t^2}{r^3}\frac{(z'-z)}{r} dt d\theta$$

se ρ ha la derivata finita, converge a zero con t.

Ponendo mente alle formule (3) (4) e (5), la (2) darà

$$\lim_{z=0} \frac{\partial v_a}{\partial z} = -2\pi\rho_0$$

$$\lim_{z=0} \frac{\partial v_b}{\partial z} = 2\pi\rho_0$$

onde

$$\lim_{z=0}\left(\frac{\partial v_a}{\partial z}-\frac{\partial v_b}{\partial z}\right)=-4\pi\rho$$

e sostituendo nella equazione (1) abbiamo

$$\lim_{z=0}\left(\frac{\partial V_a}{\partial z}-\frac{\partial V_b}{\partial z}\right)=-4\pi\rho$$

Denotando in generale con p la normale presa positiva quando ci si allontana dalla superficie, avremo:

$$(6)\qquad \lim\left(\frac{\partial V_a}{\partial p_a}+\frac{\partial V_b}{\partial p_b}\right)=-4\pi\rho$$

Il teorema espresso da questa equazione, vale per tutti i punti nei quali la curvatura è finita, vi è un piano tangente determinato, ed esiste una derivata finita per la funzione che esprime la densità. È facile a vedersi che seguiterebbe a valere anche in quei punti nei quali la curvatura è infinita, o non esiste una derivata finita di ρ, quando però si avesse

$$z'=mt^{1+\mu}\ ,\ \frac{\partial z'}{\partial t}=m_1 t_\mu\ ,\ \rho-\rho_0\gamma=nt$$

essendo μ e ν quantità positive, ed m, m_1 ed n quantità sempre finite.

Se denotiamo con α β, γ i coseni degli angoli che la normale p diretta verso la parte in cui i valori di V sono stati distinti coll'indice a, alla superficie avremo dall'equazione (6)

$$(7)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial V_a}{\partial x}-\frac{\partial V_b}{\partial x}&=-4\pi\rho\alpha\\ \frac{\partial V_a}{\partial y}-\frac{\partial V_b}{\partial y}&=-4\pi\rho\beta\\ \frac{\partial V_a}{\partial z}-\frac{\partial V_b}{\partial z}&=-4\pi\rho\gamma\end{aligned}$$

§. IX.

Derivate seconde della funzione potenziale di un corpo.

Se V è la funzione potenziale di una massa che occupa uno spazio S colla densità ρ, abbiamo dimostrato nel §. VII, che le derivate prime di V sono uguali ciascuna a due funzioni potenziali, e che denotando con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale alla superficie σ che limita lo spazio S, diretta verso l' interno di S, fa cogli assi, e ponendo

$$(1) \qquad u=\int_\sigma \frac{\rho\,\alpha}{r}d\sigma\ ,\ v=\int_\sigma \frac{\rho\,\beta}{r}d\sigma\ ,\ w=\int_\sigma \frac{\rho\,\gamma}{r}d\sigma$$

$$(2) \qquad U_1=\int_S \frac{\partial\rho}{\partial x'}\,\frac{dS}{r}\ ,\ U_2=\int_S \frac{\partial\rho}{\partial y'}\,\frac{dS}{r}\ ,\ U_3=\int_S \frac{\partial\rho}{dz'}\,\frac{dS}{r}$$

si ha:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}&=-u+U_1\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=-v+U_2\\ \frac{\partial V}{\partial z}&=-w+U_3 \end{aligned}$$

Distinguendo coll'indice e i valori delle diverse funzioni potenziali nello spazio esterno al corpo, e cogl'indici i quelli nello spazio S occupato da' corpo, ed osservando che le derivate prime di U_1, U_2, U_3 sono continue in tutto lo spazio, dalle (3) avremo

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}=-\frac{\partial u_e}{\partial x}+\frac{\partial u_i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial u_e}{\partial y}+\frac{\partial u_i}{\partial y}$$

e altre quattro equazioni che si ottengono permutando le coordinate. Ponendo mente all' equazioni (1) di questo e alle (7) del paragrafo precedente, si ha

$$\frac{\partial u_e}{\partial x}-\frac{\partial u_i}{\partial x}=-4\pi\rho\alpha^2$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial y}-\frac{\partial u_i}{\partial y}=-4\pi\rho\alpha\beta$$

e altre quattro equazioni analoghe per le altre funzioni e coordinate. Onde si avranno le sei equazioni.

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}=4\pi\rho\alpha^2 \\ &\frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}=4\pi\rho\beta^2 \\ &\frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}=4\pi\rho\gamma^2 \end{aligned}\right.$$

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V_e}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial y\partial z}=4\pi\rho\beta\gamma \\ &\frac{\partial^2 V_e}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial z\partial x}=4\pi\rho\gamma\alpha \\ &\frac{\partial^2 V_e}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 V_i}{\partial x\partial y}=4\pi\rho\alpha\beta \end{aligned}\right.$$

Sommando le tre equazioni (4), ed osservando che si ha:

$$\Delta^2 V_e=0$$

si otterrà:

$$\Delta^2 V_i=-4\pi\rho$$

Questa equazione è sodisfatta in tutto lo spazio S occupato dal corpo, e non solo al limite alla superficie. Infatti se consideriamo un punto o nell'interno del corpo, e descriviamo col centro in o e col raggio R una sfera s contenuta tutta nello spazio S, denotando con v la funzione potenziale di questa sfera, e con V′ la funzione potenziale della porzione rimanente del corpo, avremo

$$V = v + V'$$

e quindi, essendo nei punti interni alla sfera s

$$\Delta^2 V' = 0$$

sarà nei medesimi:

$$\Delta^2 V = \Delta^2 v.$$

Ora per quanto si è dimostrato nel §. VII, abbiamo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_\sigma \frac{\rho \cos\alpha}{r} d\sigma + \int_s \frac{\partial \rho}{\partial x'} \frac{ds}{r}$$

onde

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\int_\sigma \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \cos\alpha d\sigma - \int_s \frac{\partial \rho}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} ds$$

Se prendiamo l′ origine nel punto o, il raggio vettore r è normale alla superficie σ della sfera e abbiamo ivi $r = R$. Onde

$$\int_\sigma \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \cos\alpha d\sigma = \int \frac{\rho}{R^2} \cos^2\alpha d\sigma$$

Ma

$$d\sigma = R^2 d\omega$$

essendo $d\omega$ l′ elemento della sfera di raggio 1, quindi

$$(7) \qquad \int_\sigma \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \cos\alpha d\sigma = \int_\omega \rho \cos^2\alpha d\omega$$

Avremo inoltre

$$(8) \int_s \frac{\partial \rho}{\partial x'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} ds = - \int_s \frac{\partial \rho}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial r} \frac{ds}{r^2} = - \int_\omega \int_0^R \frac{\partial \rho}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial r} d\omega dr$$

Sostituendo i valori (7) e (8) nella equazione (6), costruendo le espressioni analoghe per y e per z e sommando si ha

$$\Delta^2 v = - \int_\omega \rho d\omega + \int_\omega \int_0^R \frac{\partial \rho}{\partial r} dr d\omega = - \int_\omega \rho d\omega + \int_\omega (\rho - \rho_0) d\omega$$

$$= - \int_\omega \rho_0 d\omega = -4\pi\rho_0$$

e quindi

$$\Delta^2 v = -4\pi\rho_0$$

Abbiamo dunque nell'interno del corpo

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho.$$

§. X.

Caratteristiche delle funzioni potenziali.

Da tutto ciò che abbiamo dimostrato nei paragrafi precedenti si raccoglie che la funzione potenziale V di una massa a tre dimensioni di forma qualunque, di densità costante o variabile, ha le seguenti proprietà:

1.° È una funzione a un sol valore delle coordinate del punto attratto, finita e continua in tutto lo spazio; quando il punto attratto è all'infinito, si annulla, e i prodotti della medesima per le coordinate del punto attratto rimangono sempre quantità finite;

2.° Le sue derivate prime sono finite e continue in tutto lo spazio; quando il punto attratto è all' infinito s' annullano, ed i prodotti di esse per i quadrati delle rispettive coordinate del punto attratto rimangono sempre quantità finite;

3.° Le sue derivate seconde rimanendo sempre finite, sono continue in tutto lo spazio, eccettuate le superficie attraverso le quali la densità è discontinua, e sodisfano all' equazione:

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho,$$

dove ρ è la densità della massa nel punto attratto, se è interno alla massa stessa, ed è eguale a zero se il punto è esterno.

La funzione potenziale V di una massa distribuita comunque sopra una superficie ha le seguenti proprietà:

1.° È una funzione a un sol valore delle coordinate del punto attratto, finita e continua in tutto lo spazio, si annulla all'infinito, e i prodotti di essa per le coordinate del punto attratto col crescere di queste convergono verso quantità finite.

2.° Le derivate prime di questa funzione sono finite in tutto lo spazio, si annullano all' infinito ed i prodotti di esse per i quadrati delle coordinate col crescere di queste convergono verso quantità finite, e sono continue in tutti i punti che non si trovano sopra la superficie data.

3.° La derivata presa rispetto alla normale alla superficie stessa nel passare da una parte all' altra varia bruscamente di valore, ed abbiamo:

$$\frac{dV_a}{dp} - \frac{dV_b}{dp} = -4\pi\rho,$$

dove ρ indica la densità in quel punto, p la normale presa positivamente quando ci si allontana dalla superficie dalla parte di a.

4.° In tutti i punti dello spazio, ad esclusione dei punti della superficie, abbiamo:

$$\Delta^2 V = 0.$$

La funzione potenziale V di una massa distribuita sopra una linea ha le seguenti proprietà:

1.° La funzione V e le sue derivate prime sono finite e continue in tutto lo spazio che si ottiene escludendo quello interno a una superficie tubulare descritta intorno alla linea stessa con una sezione piccola quanto si vuole, e all' infinito si annullano come le altre funzioni potenziali e le loro derivate.

2.° In tutto lo spazio, escluso quello interno alla superficie tubulare, è sodisfatta la equazione

$$\Delta^2 V = 0.$$

3. Denotando con t la lunghezza della normale alla linea condotta dal punto attratto, abbiamo

$$\lim_{t=0} \frac{V}{\log t} = -2\rho$$

$$\lim_{t=0} t\frac{\partial V}{\partial t} = -2\rho$$

essendo ρ la densità nel punto $t=0$.

Le proprietà enunciate per le tre specie di funzioni potenziali sono caratteristiche, cioè le determinano compiutamente, ossia non possono esistere due funzioni differenti che abbiano tutte quante le proprietà enunciate per una stessa specie di funzioni.

Infatti se V e V' sono due funzioni che hanno a comune tutte le proprietà enunciate per una specie di funzioni potenziali, e poniamo

$$W = V - V'$$

la funzione W avrà le seguenti proprietà:

Sarà una funzione a un sol valore delle coordinate che insieme alle sue derivate prime si conserverà finita e continua in tutto lo spazio, si annullerà all'infinito, e moltiplicata per una qualunque delle coordinate, non diverrà infinita all'infinito, e le sue derivate moltiplicate per i quadrati delle coordinate non diverranno infinite all' infinito: in tutto lo spazio, ad eccezione di alcune speciali superficie o linee, sodisfarà all' equazione

$$\Delta^2 W = 0.$$

Pertanto avremo:

$$\int\int\int W\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz = 0\,,$$

qualunque siano i limiti degl' integrali; perchè i valori differenti da zero che potrebbe avere $\Delta^2 W$ non possono fare acquistare valori finiti all'integrale triplo non occupando uno spazio di tre dimensioni, ed essendo finiti.

Cominciamo dal considerare l' integrale:

$$\int\int\int W \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\, dx\ dy\ dz\,.$$

Essendo W e $\frac{\partial W}{\partial x}$ funzioni continue in tutto lo spazio, se effettuiamo un' integrazione per parti rispetto alla variabile x, ed estendiamo l' integrale stesso tra $-a$ e $+a$, avremo:

$$\int W \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\, \partial x = \left(W \frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=a} - \left(W \frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=-a} - \int \frac{\partial W^2}{\partial x^2}\, \partial x.$$

Operando analogamente sopra gli altri due integrali, si ottiene:

$$\int\int\int W \Delta^2 W dx dy dz =$$

$$\int\int\left[\left(W \frac{\partial W}{\partial x}\right)_a - \left(W \frac{\partial W}{\partial x}\right)_{-a}\right] dy\, dz + \int\int\left[\left(W \frac{\partial W}{\partial y}\right)_a -\right.$$

$$\left. - \left(W \frac{\partial W}{\partial y}\right)_{-a}\right] dz dx + \int\int\left[\left(W \frac{\partial W}{\partial z}\right)_a - \left(W \frac{\partial W}{\partial z}\right)_{-a}\right] dx dy -$$

$$- \int\int\int\left(\frac{\partial W^2}{\partial x^2} + \frac{\partial W^2}{\partial y^2} + \frac{\partial W^2}{\partial z^2}\right) dx dy dz$$

Ora a cagione delle proprietà di W, aW_a e $a^2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a$ si mantengono sempre finite; quindi si potrà determinare una quantità costante k di cui

$$a^3\left[\left(W\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a-\left(W\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{-a}\right]$$

si mantenga sempre minore; avremo dunque:

$$\int\int\left[\left(W\frac{\partial W}{\partial x}\right)_a-\left(W\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{-a}\right]dydz<\frac{k}{a^3}\int\int dydz=\frac{4k}{a},$$

e quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\left[\left(W\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{\infty}-\left(W\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{-\infty}\right]dy\,dz=0;$$

lo stesso si ha per gli altri due integrali. Dunque avremo:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\left(\frac{\partial W^2}{\partial x^2}+\frac{\partial W^2}{\partial y^2}+\frac{\partial W^2}{\partial z^2}\right)dxdydz=0:$$

ma essendo la quantità sotto il segno sempre finita, continua e positiva, dovrà essere:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial z}=0\ ;$$

onde:

$$W=\text{costante.}$$

Ma all'infinito, $W=0$, quindi sempre:

$$W=0,$$

e in tutto lo spazio $V=V'$ come volevano dimostrare. Questo teorema è dovuto a *Dirichlet*.

§. XI.

Teorema di Green.

Se in uno spazio S limitato da una o più superficie, il cui aggregato denoteremo con σ, due funzioni: U e V si conservano sempre a un sol valore, finite e continue insieme colle loro derivate prime, ed hanno finite le derivate seconde, per il teorema di analisi dimostrato nel §. VII, avremo:

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}dS = -\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial x}U\cos\alpha\, d\sigma - \int_S U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dS\,,$$

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}dS = -\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial y}U\cos\beta\, d\sigma - \int_S U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dS\,,$$

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}dS = -\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial z}U\cos\gamma\, d\sigma - \int_S U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}dS\,,$$

dove α, β, γ denotano gli angoli che fa cogli assi la normale p diretta verso l' interno di S. Sommando queste tre equazioni ed osservando che si ha:

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial p}\,,\quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial p}\,,\quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial p}\,,$$

otteniamo:

$$(1)\int_S\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dS = -\int_\sigma U\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma - \int_S U\Delta^2 V dS\,,$$

Analogamente operando rispetto a V, abbiamo anche:

$$(2)\int_S\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dS = -\int_\sigma V\frac{\partial U}{\partial p}d\sigma - \int_S V\Delta^2 U dS$$

Sottraendo la equazione (1) dalla (2) si ottiene:

$$(3)\qquad \int_\sigma\left(V\frac{\partial U}{\partial p}-U\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\sigma=\int_S(U\Delta^2V-V\Delta^2U)dS\ ;$$

questo è il teorema di *Green*. Vediamone le più importanti conseguenze.

Se col centro in un punto m' dello spazio S, di coordinate: x', y', z', e con un raggio ε piccolo quanto si vuole, descriviamo una sfera s contenuta tutta in S, il che potrà sempre farsi quando m' non sia sopra la superficie σ che limita S, e consideriamo lo spazio S' che si ottiene togliendo dallo spazio S lo spazio s, la funzione

$$U=\frac{1}{r},$$

essendo r la distanza di m' dal punto; x, y, z, sodisfarà in S' a tutte le condizioni richieste dal teorema di *Green*. Dunque se V sodisfa a queste condizioni in S e quindi anche in S', potremo applicare la formula (3), purchè si aggiunga alla superficie σ la superficie τ della sfera s, e si prenda lo spazio S' invece dello spazio S, ed osservando che $\Delta^2\frac{1}{r}=0$, avremo:

$$(4)\quad \int_\sigma\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\sigma+\int_\tau\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)d\tau=\int_{S'}\frac{\Delta^2V}{r}dS\ .$$

Ora prendendo il polo nel punto m', si ha:

$$\int_s\frac{\Delta^2V}{r}dS=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^\varepsilon\Delta^2V\,r\,\mathrm{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\ ,$$

ed essendo Δ^2V una quantità sempre finita,

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_s\frac{\Delta^2V}{r}dS=0\ .$$

Ma:

$$\int_{S'} \frac{\Delta^2 V}{r}\, dS' = \int_S \frac{\Delta^2 V}{r}\, dS - \int_s \frac{\Delta^2 V}{r}\, ds$$

onde:

$$(5)\qquad \lim_{\varepsilon=0} \int_{S'} \frac{\Delta^2 V}{r} dS' = \int_S \frac{\Delta^2 V}{r} dS\ .$$

Abbiamo inoltre:

$$\int_\tau \frac{\partial V}{\partial r} \frac{d\tau}{r} = \varepsilon \int_\omega \frac{\partial V}{\partial r} d\omega\ ,$$

essendo $d\omega$ l'elemento della superficie sferica di raggio uguale alla unità, e ω tutta la superficie della medesima. Poichè $\frac{\partial V}{\partial r}$ è una quantità sempre finita in S, avremo evidentemente

$$(6)\qquad \lim_{\varepsilon=0} \int_\tau \frac{\partial V}{\partial r} \frac{d\tau}{r} = 0\ .$$

Finalmente

$$\int_\tau V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} d\tau = -\int_\omega V d\omega = -4\pi V' + \varepsilon \int_\omega \frac{V' - V}{\varepsilon} d\omega$$

e quindi se V ha in tutto lo spazio S derivate finite, e V' è il suo valore nel punto m', avremo:

$$(7)\qquad \lim_{\varepsilon=0} \int_\tau V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} d\tau = -4\pi V'\ .$$

Quindi passando al limite per $\varepsilon=0$, la equazione (1), osservando le equazioni (5), (6) e (7), darà

$$(8)\qquad V' = \frac{1}{4\pi} \int_\tau \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial p} \right) d\tau - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta^2 V}{r}\, dS\ .$$

Se il punto m' è sopra la superficie σ, la sfera descritta col centro in m' e col raggio ε, intersecherà la superficie σ secondo una curva c, e la porzione di σ racchiusa da questa curva c e che contiene il punto m' sia ν; sia σ' la superficie σ da cui è tolta la porzione ν; e sia τ la porzione della superficie sferica che rimane in S, s la porzione di spazio racchiuso da τ e da ν, ed S′ lo spazio S da cui è tolto lo spazio s. La equazione (3) darà

$$\int_{\sigma'}\left(\mathrm{V}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}\right)d\sigma'+\int_{\tau}\left(\mathrm{V}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial r}\right)d\tau=\int_{\mathrm{S}'}\frac{\Delta^2\mathrm{V}}{r}d\mathrm{S}'$$

Osserviamo primieramente che si ha:

$$\int_{\nu}\mathrm{V}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\nu=-\int_{\nu}\frac{\mathrm{V}}{r^2}\cos(rp)d\nu$$

e prendendo per asse z la normale a σ in m', e per piano xy il piano tangente e ponendo

$$t^2=x^2+y^2$$

onde

$$r^2=t^2+z^2$$

$$d\nu=\frac{tdtd\theta}{\cos(zp)}$$

e quindi

$$\int_{\nu}\mathrm{V}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\nu=-\int_0^{2\pi}\int_0^{t}\frac{\mathrm{V}\cos(rp)t\,dt\,d\theta}{\cos(zp)\,(t^2+z^2)}$$

Ma se la superficie ha in m' la curvatura finita, sarà

$$\frac{\cos(rp)}{\cos(zp)}=\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}}{r}=\frac{\mu t^2}{r}$$

e μ quantità finita. Onde

$$\int_\nu V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\nu=-\int_0^{2\pi}\int_0^t\frac{V\mu t^3 dt d\theta}{(t^2+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}=-\int_0^{2\pi}\int_0^t V\mu\frac{dt d\theta}{\sqrt{\left(1+\frac{\varepsilon^2}{t^2}\right)^3}}$$

dunque

$$(10)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_\nu V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\nu=0$$

Analogamente

$$(11)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_\nu\frac{\partial V}{\partial p}\frac{d\nu}{r}=\lim_{t=0}\int_0^{2\pi}\int_0^t\frac{\partial V}{\partial p}\frac{dt d\theta}{\cos\varepsilon p\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{t^2}}}=0$$

quindi

$$(12)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma'}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\sigma=\int_{\sigma_1}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\sigma$$

L' equazioni (5) e (6) seguitano sempre a sussistere; la equazione (7) invece non vale più e abbiamo:

$$\int_\tau V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}d\tau=-\int_\omega V d\omega=-V'\int d\omega+\varepsilon\int_\omega\frac{V'-V}{\varepsilon}d\omega$$

dove gl'integrali devono essere estesi a tutta la porzione di sfera di raggio uguale all'unità che è intercettata dal cono che ha il vertice in m' e per base la linea c, che al limite è 2π. Dunque

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\tau V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}d\tau=-2\pi V'$$

Dunque se il punto m' è sopra la superficie σ, ed ivi la superficie ammette un piano tangente ed ha la curvatura finita, avremo

$$(13)\qquad V'=\frac{1}{2\pi}\int_S\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\Delta^2V}{r}dS$$

Se nel punto m' di σ, e lungo un numero finito di linee separate che passano per m' la superficie σ non ammette un piano tangente determinato, ma si può descrivere intorno ad m' una curva c che racchiuda un area composta di un numero finito di pezzi nei quali la superficie ammette un piano tangente determinato, e si ha

$$z=\mu t^{2+\lambda}\ ,\ \lambda>0$$

l' equazioni (5), (6), (10) e (12) seguitano a sussistere e abbiamo:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\tau V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\tau=-\omega V'$$

essendo ω l' angolo solido formato dai piani tangenti nel punto m'. Quindi in generale

$$(14)\qquad \omega V'=\int_\sigma\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\sigma-\int_S\frac{\Delta^2V}{r}dS$$

dove $\omega=4\pi$ se il punto m' è nello spazio S a distanza qualunque piccola quanto si vuole dalla superficie, ed è uguale all'angolo solido formato dai piani tangenti nel punto m'.

Se G è una funzione a un sol valore, finita e continua insieme colle sue derivate prime in S, ed ivi sodisfa alla equazione

$$\Delta^2G=0$$

avremo per il teorema di *Green*:

$$0=\int_\sigma\left(V\frac{\partial G}{\partial p}-G\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\sigma-\int_S G\Delta^2V dS$$

e sommando questa colla (14)

$$\omega V' = \int_\sigma \left[V\left(\frac{\partial G}{\partial p} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p}\right) - \left(G + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial V}{\partial p}\right] d\sigma - \int_S \left(G + \frac{1}{r}\right)\Delta^2 V dS$$

Ora se sopra tutta la superficie σ, abbiamo

$$G + \frac{1}{r} = 0$$

avremo:

$$\omega V' = \int_\sigma V \frac{\partial}{\partial p}\left(G + \frac{1}{r}\right) d\sigma - \int_S \left(G + \frac{1}{r}\right)\Delta^2 V dS$$

e quindi V' determinata in tutto lo spazio S per mezzo dei valori che ha sopra la sola superficie σ, se è dato $\Delta^2 V$ cioè un'equazione a derivate parziali di 2º ordine a cui deve sodisfare in tutto lo spazio S. La funzione G di cui ci occuperemo in seguito si chiama la funzione di *Green*.

Se denotiamo con S lo spazio racchiuso da una superficie σ, e con S′ il rimanente spazio compreso tra σ e una sfera di raggio infinito col centro in m', se il punto m' cui si riferisce il valore V' della funzione V è in S, abbiamo la formula (14), se poi il punto è in S′, avremo

$$V' = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right) d\sigma - \int_\omega \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right) r^2 d\omega - \int_{S'} \frac{\Delta^2 V}{r} dS$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}\right) d\sigma + \int_\omega \left(V - r\frac{\partial V}{\partial p}\right) d\omega - \int_{S'} \frac{\Delta^2 V}{r} dS .$$

Quindi se

$$\lim_{r=\infty} V = 0 \ , \ \lim_{r=\infty} r \frac{\partial V}{\partial p} = 0$$

come avviene per le funzioni potenziali, sarà uguale a zero il secondo termine del secondo membro e avremo la equazione (12) anche per lo spazio S'.

Se V=1 in tutto lo spazio S', sarà:

$$\int_\omega \left(V+r\frac{\partial V}{\partial p}\right)d\omega=4\pi \;,\; \Delta^2 V=0$$

quindi:

$$(15) \qquad \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma=0$$

Se V=1 in tutto lo spazio S, avremo dalla (14)

$$(16) \qquad \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma=\omega$$

dove $\omega=4\pi$ se m' è nell' interno di S, e uguale all' angolo solido formato dai piani tangenti a σ nel punto m' se m' è sopra la superficie.

Le due equazioni (15) e (16) danno un teorema dovuto a *Gauss*.

Se nella equazione (1) poniamo U=1, otteniamo:

$$(17) \qquad \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial p} d\sigma=-\int_S \Delta^2 V dS$$

Ora sia:

$$V=\int_S \frac{\rho dS}{r}$$

avremo

$$\frac{\partial V}{\partial p}=\frac{\partial V}{\partial x'}\alpha'+\frac{\partial V}{\partial y'}\beta'+\frac{\partial V}{\partial z'}\gamma'=-\int_S \rho\left(\alpha'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\beta'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+\gamma'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS$$

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial p}\, d\sigma = -\int_\sigma \alpha' d\sigma \int_S \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS - \int_\sigma \beta' d\sigma \int_S \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dS - \int_\sigma \gamma' d\sigma \int_S \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dS$$

$$= \int_S \rho\, dS \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p}\, d\sigma = 4\pi \int \rho dS$$

Dunque

$$\int_S (\Delta^2 V + 4\pi\rho) dS = 0$$

e questa equazione dovendo sussistere per qualunque parte di S, si prenda piccola quanto si vuole, dovrà essere

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho$$

Questa dimostrazione non suppone come l' altra data nel § IX che ρ ammetta una derivata finita e determinata in tutto lo spazio S.

Colla sostituzione di questo valore di $\Delta^2 V$ nella equazione (17) abbiamo

$$(18) \qquad \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial p}\, d\sigma = 4\pi M$$

essendo M la massa racchiusa dalla superficie σ.

Ora se nella equazione (1) poniamo U=V, e nello spazio S racchiuso dalla superficie σ, è sempre

$$\Delta^2 V = 0$$

e V uguale ad un costante c sopra tutta la superficie σ, avremo

$$\int_S \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2} \right) dS = -c \int \frac{\partial V}{\partial p}\, d\sigma = 0$$

poichè essendo $\Delta^2 V = 0$ in tutto lo spazio, è sodisfatta la equazione (18) nella quale $M=0$. Dunque se V è finita e continua insieme colle sue derivate prime, dovranno essere uguali a zero in tutto S le derivate prime di V, e quindi V costante, e poichè sopra la superficie σ è uguale a c, sarà uguale a c in tutto lo spazio S, ed abbiamo il seguente teorema:

Una funzione a un sol valore, finita e continua insieme colle sue derivate prime, che in tutto uno spazio S limitato da una superficie σ, sodisfa alla equazione $\Delta^2=0$ e sopra σ ha un valore costante, ha questo stesso valore in tutto lo spazio S.

§. XII.

Funzione potenziale di un doppio strato.

Sia σ una superficie connessa, cioè tale che prendendo due qualunque dei suoi punti, questi possano essere uniti per mezzo di una linea continua contenuta tutta sovra σ. La superficie σ sarà chiusa, o avrà un contorno formato da una o più linee chiuse, che denoteremo con s. Fissiamo la parte della superficie dalla quale si contano positivamente i prolungamenti delle normali, e sia σ' la superficie luogo geometrico dell'estremità delle normali prolungate di una quantità positiva ε. Sopra la superficie σ sia distribuita una massa che attrae secondo la legge di *Newton* il punto m' in cui è concentrata la massa uguale alla unità; la densità nell'elemento $d\sigma$ sia ρ. Sopra la superficie σ' sia distribuita una massa che respinge secondo la stessa legge il punto m'; la densità nell'elemento $d\sigma'$ sia ρ'. Sopra gli elementi $d\sigma$ e $d\sigma'$ che si trovano all'estremità della stessa normale alla superficie σ, siano masse uguali: cioè sia

$$(1) \qquad \rho' d\sigma' = \rho d\sigma.$$

La funzione potenziale delle masse distribuite sopra le superficie σ e σ' sarà

$$(2) \qquad V = \int_\sigma \frac{\rho d\sigma}{r_1} - \int_{\sigma'} \frac{\rho' d\sigma'}{r_2}$$

dove r_1 ed r_2 sono rispettivamente le distanze dei punti di σ e di σ' dal punto m'.

Osservando la equazione (1), si ottiene:

$$V = \int_\sigma \rho\varepsilon \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{\varepsilon} d\sigma .$$

Facendo diminuire ε ed aumentare ρ in mòdo che $\rho\varepsilon$ si mantenga sempre uguale a μ, e passando al limite per $\varepsilon = 0$, avremo

$$V = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma . \tag{3}$$

Così abbiamo due superficie infinitamente vicine, dai punti corrispondenti delle quali emanano forze attrattive e ripulsive di uguale intensità, e che formano ciò che si chiama un *doppio strato*, la cui funzione potenziale è data dalla equazione (3).

Se μ è costante sopra tutta la superficie, cioè se il doppio strato è omogeneo, avremo:

$$V = \mu \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma = -\mu \int_\sigma \frac{\cos(rp) d\sigma}{r^2} = \mu \int_\omega \mp d\omega \tag{4}$$

dove bisogna prendere il segno — se l' angolo che fa la direzione di r crescente colla parte positiva della normale p è acuto e il segno $+$ se questo angolo è ottuso, e $d\omega$ è l'elemento della sfera descritta col raggio uguale alla unità e col centro in m'.

Se la superficie σ è chiusa, la direzione positiva della normale p è verso l' interno dello spazio racchiuso da σ, e il punto m' cui si riferisce il valore di V è nell' interno, l'angolo (rp) sarà sempre ottuso, e quindi

$$V = 4\pi\mu ;$$

se è nello spazio esterno, invece abbiamo in parti uguali della sfera ω l'angolo (rp) acuto ed ottuso, e quindi

$$V = 0.$$

Dunque il doppio strato, avendo costante la funzione potenziale nello spazio interno e nell'esterno, non esercita azione alcuna.

Se la superficie σ ha un contorno e l'angolo che r fa con p è sempre ottuso o sempre acuto per i punti di σ, la funzione potenziale sarà uguale all'angolo solido del cono che ha il vertice in m' e per direttrice il contorno di σ, preso negativamente se l'angolo che r fa con p è acuto, preso positivamente se è ottuso.

Se denotiamo con V_e il valore verso cui converge V quando m' si avvicina indefinitamente a un punto m di σ dalla parte in cui si contano positive le normali, e V_i il valore verso cui converge V, quando m' si avvicina ad m dall'altra parte, e se nel punto m la curvatura è finita, avremo:

$$V_e = \quad 2\pi\mu$$
$$V_i = -2\pi\mu$$

e quindi:

$$V_e - V_i = 4\pi\mu\ .$$

Se nel punto m vi è un vertice o uno spigolo avremo:

$$V_e = \omega\mu$$
$$V_i = -(4\pi - \omega)\mu$$

essendo ω l'angolo solido formato dai piani tangenti a σ nel punto m'; quindi sempre

$$V_e - V_i = 4\pi\mu\ .$$

Dunque la funzione potenziale di un doppio strato omogeneo è discontinua attraversando la superficie del medesimo, e la differenza dei valori dalle due parti è $4\pi\mu$.

Consideriamo ora le sue derivate. Abbiamo

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = -\mu \int_\sigma \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \alpha + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \beta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \gamma \right) d\sigma$$

ed essendo:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$$

se poniamo:

$$(5)\qquad Y = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \; , \; Z = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \; ,$$

otterremo:

$$(6)\qquad \frac{\partial V}{\partial x'} = \mu \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \alpha + \frac{\partial Z}{\partial x} \beta - \frac{\partial Y}{\partial x} \gamma \right] d\sigma \; .$$

Questo integrale è un caso particolare di uno più generale che si può immediatamente ridurre a un integrale semplice esteso al contorno di σ. Esponiamo questo teorema di cui moltissime sono le applicazioni nella fisica matematica.

Poniamo

$$\Omega = \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \alpha + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) \beta + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \gamma \right] d\sigma.$$

Prendiamo per direzione positiva della normale quella che fa un angolo acuto colla direzione positiva dell'asse delle z; sarà:

$$\alpha = -\frac{\partial z}{\partial x} \gamma \; , \; \beta = -\frac{\partial z}{\partial y} \gamma \; , \; \gamma \, d\sigma = dx dy$$

e quindi

$$\Omega = \int\int \left[\frac{d}{dy} \left(Z \frac{\partial z}{\partial x} + X \right) - \frac{d}{dx} \left(Z \frac{\partial z}{\partial y} + Y \right) \right] dx dy \; .$$

Ora se la proiezione di σ sopra il piano $x\,y$ cuopre una sola volta il piano stesso, questo integrale dovrà estendersi alla parte di piano coperta dalla proiezione, e che ha per contorno la proiezione del contorno di σ. Se denotiamo con s' questa ultima proiezione contando la lunghezza di s', a partire da un punto fisso e girando da sinistra a destra di chi si trovi sopra il piano delle xy dalla parte delle z positive; per un noto teorema di analisi, avremo:

$$\Omega = -\int_{s'}\left[X\frac{\partial x}{\partial s'} + Y\frac{dy}{ds'} + Z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s'} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s'}\right)\right]ds'$$

onde:

$$(7)\quad -\int_s\left(X\frac{\partial x}{\partial s} + Y\frac{\partial y}{\partial s} + Z\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds = \int_\sigma\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\beta + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\gamma\right]d\sigma$$

Ponendo $X = 0$, ed osservando l'equazioni (5) e (6), la (7) darà:

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = -\mu\int_s\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds = \mu\int_s\frac{\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial s}}{r^2}ds$$

Ora: $$\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial s} = \operatorname{sen}(rt)\cos(nx)$$

essendo (rt) l'angolo che la direzione positiva di r fa colla direzione positiva della tangente, cioè nella direzione in cui cresce s, ed (nx) l'angolo che fa coll'asse delle x la normale al piano della r e della tangente t.

Abbiamo quindi:

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \mu\int_s\frac{\operatorname{sen}(rt)\cos(nx)}{r^2}ds$$

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial y'} = \mu\int_s\frac{\operatorname{sen}(rt)\cos(ny)}{r^2}ds$$

$$\frac{\partial V}{\partial z'} = \mu\int_s\frac{\operatorname{sen}(rt)\cos(nz)}{r^2}ds$$

Poichè le funzioni che compariscono sotto il segno integrale sono finite e continue in tutto lo spazio, fuori che lungo la linea s, è chiaro che tali saranno anche le derivate della funzione potenziale del doppio strato omogeneo, anche nell'attraversare la superficie del medesimo.

Determiniamo ora le proprietà caratteristiche della funzione potenziale di un doppio strato qualunque

$$V=\int_\sigma \mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\sigma=-\int_\sigma\frac{\mu\cos(rp)}{r^2}d\sigma$$

Sia r_1 la minima distanza del punto m' dai punti della superficie σ, avremo in valore assoluto, se μ è sempre positivo:

$$V<\frac{1}{r_1^2}\int_\sigma \mu d\sigma$$

Quindi V coll'allontanarsi indefinitamente di m' converge a zero.

Se l è il raggio vettore di m', avremo inoltre:

$$\lim_{l=\infty} lV=0\ ,\ \lim_{l=\infty} l^2V=\int_\sigma \mu d\sigma$$

Se μ avesse per una porzione di superficie valori positivi, e per l'altra valori negativi si decomporrebbe in due che avrebbero ciascuna μ sempre positivo o sempre negativo, e il teorema varrebbe per tutte due e quindi per la loro differenza.

Se denotiamo al solito con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale p alla superficie σ fa con i tre assi, avremo

$$V=\int\mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\beta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\gamma\right)d\sigma\ ;$$

onde

$$\frac{\partial V}{\partial x'}=-\int\mu\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}\alpha+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}\beta+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}\gamma\right)d\sigma$$

Denotando con a, b, c i coseni degli angoli che la distanza r fa con i tre assi, abbiamo

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \frac{3a^2-1}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x dy} = \frac{3b^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} = \frac{3c^2}{r^3}$$

e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = -\int_\sigma \frac{\mu}{r^3}[(3a^2-1)\alpha+3b^2\beta+3c^2\gamma)]d\sigma \ .$$

Da questa espressione si deduce come precedentemente per il valore assoluto della derivata la disuguaglianza

$$\frac{\partial V}{\partial x'} < \frac{4}{r_1^3}\int_\sigma \mu d\sigma \ ;$$

onde

$$\lim_{l=\infty} l^2 \frac{\partial V}{\partial x'} = 0 \ ,$$

Analogamente:

$$\lim_{l=\infty} l^2 \frac{\partial V}{\partial y'} = 0 \ ,$$

$$\lim_{l=\infty} l^2 \frac{\partial V}{\partial z'} = 0 \ .$$

Sia m un punto della superficie σ, C una curva descritta sopra σ intorno ad esso, s la porzione di σ racchiusa da C. Sia v la funzione potenziale del doppio strato s, e V' quella del rimanente doppio strato che è sopra σ, avremo:

$$V = v + V',$$

e V' e le sue derivate prime saranno finite e continue anche quando il punto m' passa per m da una parte all' altra di σ, perchè m è esterno al doppio strato del quale è funzione potenziale V'. Per la funzione v poi abbiamo

$$v = \int_s \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} ds = \mu_0 \int_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} ds - \int_s \frac{(\mu - \mu_0)}{r^2} \cos(rp) ds \,,$$

essendo μ_0 il valore di μ nel punto m. Se prendiamo l'origine delle coordinate nel punto m, per asse delle z la normale alla superficie in m e poniamo

$$x = t\cos\theta \,, \quad y = t\operatorname{sen}\theta \,,$$

sarà

$$ds\cos(zp) = tdtd\theta \,, \quad r^2 = t^2 + (z' - z)^2 \,,$$

e quindi

$$\int_s \frac{\mu - \mu_0}{r} \cos(rp) ds = \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{(\mu - \mu_0)}{t} \frac{\cos(rp)}{\cos(zp)} \frac{dtd\theta}{1 + \left(\frac{z' - z}{t}\right)^2}$$

convergerà a zero coll'avvicinarsi di m' ad m.

Dunque denotando al solito con v_e e con v_i i valori verso i quali converge v quando ci si avvicina ad m dalle due parti della superficie, avremo

$$v_e - v_i = 4\pi\mu_0 \,,$$

e in conseguenza

$$\mathrm{V}_e - \mathrm{V}_i = 4\pi\mu \,.$$

Le derivate prime della funzione potenziale V rispetto a una normale alla superficie σ hanno valori uguali dalle due parti di σ.

Infatti, se denotiamo con S lo spazio limitato da una sfera di raggio infinito, col centro all'origine, e da due superficie s' ed s'' infinitamente vicine alla superficie σ del doppio strato, che unendosi lungo il contorno di σ, formano una superficie chiusa s, in tutto lo spazio S la funzione V e le sue derivate saranno finite e continue e avremo

$$\Delta^2 \mathrm{V} = 0 \,.$$

Quindi potremo applicare il teorema di *Green* dato dalla formula (8) del §. XI. e il valore di V in un punto qualunque dello spazio S e di coordinate x', y', z', sarà espresso dalla equazione

$$V' = \frac{1}{4\pi}\int_{s'}\left(V_e \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{\partial V_e}{\partial p}\frac{1}{r}\right)ds' - \frac{1}{4\pi}\int_{s''}\left(V_i \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p}\frac{1}{r}\right)ds'',$$

e al limite per s', s'' e σ infinitamente vicine, osservando la equazione

$$V_e - V_i = 4\pi\mu,$$

otterremo

$$V' = \int_\sigma \mu \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial V_e}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p}\right)\frac{d\sigma}{r}.$$

Ma

$$V' = \int_\sigma \mu \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma,$$

onde in tutto lo spazio S sarà

$$W = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{\partial V_e}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p}\right)\frac{d\sigma}{r} = 0,$$

e in conseguenza

$$\frac{\partial W}{\partial x'} = \frac{\partial W}{\partial y'} = \frac{\partial W}{\partial z'} = 0,$$

ed anche

$$\frac{\partial W_e}{\partial p} = \frac{\partial W_i}{\partial p} = 0.$$

Ma essendo W una funzione potenziale di superficie sarà

$$\frac{\partial W_e}{\partial p} - \frac{\partial W_i}{\partial p} = \frac{\partial V_i}{\partial p} - \frac{\partial V_e}{\partial p} = 0,$$

e quindi sopra tutta la superficie σ

$$\frac{\partial V_e}{\partial p} = \frac{\partial V_i}{\partial p},$$

come volevano dimostrare.

Pertanto in tutto lo spazio S la funzione potenziale di un doppio strato avrà le seguenti proprietà:

1.° Sarà una funzione delle coordinate del punto m attratto o respinto, che si conserverà a un sol valore, finita e continua in tutto lo spazio S; sopra la sfera di raggio infinito, tanto essa quanto il prodotto di essa per il raggio vettore del punto m, saranno uguali a zero; sopra la superficie s i valori che essa prende nei due punti situati sopra la stessa normale a σ differiranno di una quantità $4\pi\mu$ determinata per ogni punto di σ;

2.° Le sue derivate prime saranno funzioni a un sol valore, finite e continue in tutto lo spazio S; sopra la sfera di raggio infinito esse e i loro prodotti per il quadrato del raggio vettore di m saranno uguali a zero; sopra la superficie s le derivate rispetto alla normale avranno valori uguali nei due punti situati sopra la stessa normale a σ;

3.° Le derivate seconde, in tutto lo spazio S saranno a un sol valore, finite, continue e sodisfaranno alla equazione

$$\Delta^2 V = 0 .$$

Queste proprietà sono caratteristiche, cioè due funzioni che le hanno comuni, sono uguali in tutto lo spazio S.

Infatti, supponiamo che due funzioni V e V′ abbiano tutte queste proprietà comuni, e consideriamo la funzione

$$W = V - V' .$$

La funzione W avrà anche essa tutte le proprietà comuni a V ed a V′; soltanto nei due punti di s che si trovano sopra la stessa normale a σ, la differenza dei corrispondenti valori di W sarà uguale a zero.

La equazione (1) del paragrafo precedente, ove si ponga $U = V = W$, darà

$$\int_S \left(\frac{\partial W^2}{\partial x^2} + \frac{\partial W^2}{\partial y^2} + \frac{\partial W^2}{\partial z^2} \right) dS = - \int_{s'} W_e \frac{\partial W_e}{\partial p} ds' + \int_{s''} W_i \frac{\partial W_i}{\partial p} ds'' ;$$

poichè si dimostra in modo analogo a quello tenuto nel §. X. che l'integrale esteso alla sfera di raggio infinito è uguale a zero, e $\Delta^2 W = 0$ in tutto lo spazio S.

Al limite coll'accostarsi indefinitamente di s a σ il secondo membro diviene

$$\int_\sigma \left(W_i \frac{\partial W_i}{\partial p} - W_e \frac{\partial W_e}{\partial p} \right) d\sigma .$$

Ma $W_e = W_i$ e $\frac{\partial W_e}{\partial p} = \frac{\partial W_i}{\partial p}$; quindi questo integrale è uguale a zero e abbiamo

$$\int_S \left(\frac{\partial W^2}{\partial x^2} + \frac{\partial W^2}{\partial y^2} + \frac{\partial W^2}{\partial z^2}\right) dS = 0 .$$

Dunque essendo le derivate di W funzioni continue in tutto lo spazio S, avremo

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 ;$$

quindi W costante; ma W è uguale a zero all'infinito, dunque sarà uguale a zero in tutto S e quindi

$$V = V'$$

per tutto S, come volevano dimostrare.

§. XIII.

Superficie e strati di livello

Se V è la funzione potenziale di una massa M, le superficie rappresentate dall'equazioni della forma:

(1) $$V = \text{costante}$$

sono chiamate *superficie di livello* da *Chasles* e *superficie equipotenziali* da *Maxwe'l.*

Poichè V è una funzione a un sol valore, due superficie di livello non possono intersecarsi, però una superficie di livello può intersecare sè stessa.

Ogni superficie di livello gode la proprietà che la direzione della risultante dell' attrazione sopra uno qualunque dei suoi punti è normale alla superficie medesima. Infatti, se denotiamo con s la lunghezza di una linea qualunque tracciata sopra la superficie di livello per un punto m, contata a partire dal punto m, avremo dall'equazione (1)

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 0 ,$$

ed essendo $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$ i coseni degli angoli che la tangente alla linea s fa con i tre assi, e $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ le componenti dell'attrazione sul punto m, secondo i tre assi, la componente secondo la tangente sarà sempre uguale a zero, ossia saranno uguali a zero le componenti secondo le direzioni perpendicolari alla normale alla superficie. Dunque la risultante dell'attrazione in un punto qualunque di una superficie di livello sarà nella direzione della normale alla superficie in quel punto.

Le superficie di livello formano un sistema di superficie, l'equazioni delle quali differiscono soltanto per il valore di una costante, e poichè all'infinito la funzione potenziale ha un valore costante ed uguale a zero, una superficie di questo sistema sarà sempre una sfera di raggio infinito col centro non situato all'infinito.

Determiniamo le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le superficie di un sistema siano di livello.

Un sistema di superficie sia rappresentato dall'equazione:

$$(2) \qquad f(x, y, z, \lambda) = 0$$

e l'equazione delle varie superficie del sistema si ottengano dando a λ tutti i valori reali. Affinchè questo sistema contenga tutte le superficie di livello rispetto a una medesima funzione potenziale, dovrà esistere un valore λ_0 di λ per cui la equazione (2) rappresenta una sfera di raggio infinito. Se la massa M a cui si riferisce la funzione potenziale V non si estende all'infinito, vi dovranno essere infiniti valori di λ, per i quali si hanno superficie che racchiudono nel loro interno tutta la massa. Sia λ_1 il valore di λ corrispondente a una di queste superficie, e consideriamo lo spazio S compreso tra le due superficie (λ_0) e (λ_1). Perchè le superficie di livello corrispondenti a due valori differenti di V non debbono incontrarsi, per ogni punto di S dovrà passare una e una soltanto delle superficie del sistema (2), e V sarà costante sopra ciascuna di esse; dunque V sarà in tutto lo spazio S funzione soltanto di λ. Ma in questo spazio esterno alla massa M, si ha:

$$\Delta^2 V = 0 \,,$$

quindi, ponendo

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

sarà:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \Delta\lambda + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \Delta^2\lambda = 0 \,,$$

ossia

$$(3) \qquad \frac{\Delta^2\lambda}{\Delta\lambda} = - \frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}}{\dfrac{\partial V}{\partial \lambda}} \,.$$

Il secondo membro è una funzione della sola λ, dunque tale dev'essere anche il primo, e chiamando con *Lamé*, $\Delta\lambda$ il *parametro differenziale di primo ordine*, e $\Delta^2\lambda$ il *parametro differenziale di second' ordine*, potremo dire: affinchè le superficie del sistema (2) siano di livello, è necessario che il rapporto dei parametri differenziali di λ, sia una funzione soltanto di λ.

Affinchè V sia funzione potenziale di una massa M situata a distanza finita, è necessario ancora che denotando con r il raggio vettore del punto attratto, sia

$$(4) \qquad \lim_{r=\infty} rV = M \,, \quad \lim_{r=\infty} r\sqrt{\Delta V} = 0 \,.$$

Ma, essendo V funzione soltanto di λ,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} \,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} \,, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} \,,$$

onde, quadrando e sommando, si ha

$$(5) \qquad \Delta V = \frac{\partial V^2}{\partial \lambda^2} \Delta\lambda$$

e sostituendo nella seconda dell'equazioni (4)

$$(6) \qquad \lim_{r=\infty} r \frac{\partial V}{\partial \lambda} \sqrt{\Delta\lambda} = 0 \; .$$

Se poniamo

$$\frac{\Delta^2\lambda}{\Delta\lambda} = \varphi(\lambda)$$

avremo

$$\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}}{\frac{\partial V}{\partial \lambda}} = -\varphi(\lambda)$$

ed integrando

$$(7) \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = C \; e^{-\int \varphi(\lambda) d\lambda}$$

Sostituendo nella equazione (6)

$$(8) \qquad \lim_{r=\infty} r\sqrt{\Delta\lambda} \; e^{-\int \varphi(\lambda) d\lambda} = 0$$

Integrando la (7) tra i limiti λ e λ_0, e osservando che V dev'essere uguale a zero per $\lambda = \lambda_0$, avremo

$$(9) \qquad V = C \int_{\lambda}^{\lambda_0} e^{-\int \varphi(\lambda) d\lambda} d\lambda$$

e sostituendo nella prima dell'equazioni (4)

$$(10) \qquad \lim_{r=\infty} r \int_{\lambda}^{\lambda_0} e^{-\int \varphi(\lambda) d\lambda} d\lambda = \frac{M}{C}$$

Dunque se il rapporto dei due parametri differenziali di 2.° e di 1.° ordine è una funzione $\varphi(\lambda)$ della sola λ, atta alla integrazione, se esiste un valore di λ per cui la equazione (2) rappresenta una sfera di raggio infinito col centro situato a distanza finita, e $\varphi(\lambda)$ sodisfa all'equazioni (8) e (10), esisterà una funzione di λ data dalla equazione (9), che nello spazio che si estende all' infinito esternamente alla superficie (λ_1) ha tutte le proprietà di una funzione potenziale di una massa M situata o sulla superficie (λ_1) o nello spazio racchiuso da questa. Quindi se denotiamo con V′ il valore di questa funzione V in un punto m' di S e con r la distanza di questo punto da un punto qualunque della superficie (λ), potremo applicare la formula (8) del § XI, e avremo:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_1} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial p} \right) d\sigma \ .$$

Ma essendo il valore V_1 di V costante sopra (λ_1) che è una superficie di livello, avremo

$$\int_{\lambda_1} V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma = V_1 \int_{\lambda_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma = 0 \ ,$$

essendo il punto m' esterno allo spazio racchiuso dalla superficie (λ_1). Onde

$$V' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\lambda_1} \frac{\partial V}{\partial p} \frac{d\sigma}{r}$$

Ora essendo V funzione soltanto di λ, abbiamo:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \pm \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \frac{1}{\sqrt{\Delta \lambda}} = \pm \frac{\partial V}{\partial \lambda} \sqrt{\Delta \lambda}$$

e quindi

$$V' = \pm \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)_1 \int_{\lambda_1} \sqrt{\Delta \lambda} \frac{d\sigma}{r}$$

Dunque V è la funzione potenziale di una massa distribuita sopra la superficie (λ_1) colla densità proporzionale a $\sqrt{\Delta\lambda}$, o anche si può riguardare come la funzione potenziale di uno strato omogeneo compreso tra la superficie (λ_1) e la superficie luogo geometrico delle estremità delle normali prolungate di quantità infinitesime proporzionali a $\sqrt{\Delta\lambda}$. *Chasles* ha chiamato questo strato omogeneo *strato di livello*. La funzione potenziale di questo strato essendo costante sopra tutta la superficie chiusa (λ_1), e nello spazio racchiuso da (λ_1) non essendovi massa, per l'ultimo teorema del § XI, sarà costante.

È chiaro che il valore di V in un punto (x, y, z) e che corrisponde a un valore di λ determinato dell'equazione:

$$f(x, y, z, \lambda)=0$$

potrà riguardarsi come funzione potenziale di uno qualunque degli strati di livello costruiti sopra una qualunque delle superficie (λ) comprese tra (λ_1), e quella che passa per il punto (x, y, z); tutti daranno lo stesso valore per V.

Sia ora

$$f(x, y, z, \lambda, h) = 0 \tag{11}$$

ove λ ed h sono due parametri variabili, un sistema doppiamente infinito di superficie, e supponiamo che per ogni valore di h, compreso fra dati limiti, i valori di λ compresi pure tra dati limiti diano altrettante superficie di livello, e cerchiamo le condizioni affinchè lo strato di livello $S_{\lambda_0 h}$ corrispondente al sistema di valori λ_0 e h sia compreso tra le due superficie del sistema (11): (λ_0, h), $(\lambda_0, h + dh)$; e questo per tutti i valori di h compresi tra h_0 e h_1: in guisa che una massa che occupi lo spazio racchiuso tra le due superficie (λ_0, h_0) e (λ_0, h_1) si possa riguardare come decomponibile in strati elementari infinitesimi. Quando si verificherà questo, è chiaro che allorchè avremo determinato la funzione potenziale di uno strato di livello, la funzione potenziale di tutta la massa si otterrà con una semplice integrazione.

Affinchè lo strato di livello $S_{\lambda_0 h}$ sia uguale allo strato compreso tra le superficie (λ_0, h), $(\lambda_0, h+dh)$ è necessario che la porzione dp della normale alla prima superficie prolungata fino alla seconda sia in ogni punto della superficie proporzionale a $\sqrt{\Delta\lambda}$.

Sia: (x, y, z) un punto della superficie (λ_0, h); $(x+dx, y+dy, z+dz)$ il punto in cui la normale alla superficie (λ_0, h) nel punto (x, y, z) incontra la superficie $(\lambda_0, h+dh)$ avremo:

$$dx = \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dp}{\sqrt{\Delta f}}, \quad dy = \pm \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dp}{\sqrt{\Delta f}}, \quad dz = \pm \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dp}{\sqrt{\Delta f}},$$

e poichè il punto $(x+dx, y+dy, z+dz)$ dev' essere sopra la superficie $(\lambda_0, h+dh)$ sarà

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial h} dh = 0 ,$$

e quindi

$$dp \sqrt{\Delta f} + \frac{\partial f}{\partial h} dh = 0 .$$

Ma

$$\Delta f = \frac{\partial f^2}{\partial \lambda^2} \Delta\lambda ,$$

onde

$$(13) \qquad \frac{dp}{\sqrt{\Delta\lambda}} = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial h}}{\Delta f} dh .$$

Dunque affinchè sia dp proporzionale a $\sqrt{\Delta\lambda}$ sopra tutta la superficie (λ_0, h), è necessario che il secondo membro sia funzione soltanto di λ_0 e di h, ossia

$$(14) \qquad \Delta f - \psi(\lambda, h) \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial h} = 0 .$$

Affinchè poi le superficie siano di livello per i valori di h compresi tra h_0 e h_1 dovrà aversi tra questi limiti,

$$\Delta^2\lambda - \varphi(\lambda, h)\,\Delta\lambda = 0 \,. \tag{15}$$

La equazione (15) si può trasformare, osservando che si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0 \,.$$

Moltiplicando l'ultima per $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$, ed osservando la (16), avremo

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial \lambda^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0$$

e due equazioni analoghe per y e z. Sommando si otterrà:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\Delta^2 f - \frac{\partial}{\partial \lambda}\,\Delta f + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\Delta\lambda + \frac{\partial f^2}{\partial \lambda^2}\Delta^2\lambda = 0 \,.$$

Abbiamo inoltre:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta f}{\frac{\partial f^2}{\partial \lambda^2}}$$

per cui la precedente da

$$\Delta^2\lambda = -\frac{\Delta^2 f}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} + \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\Delta f}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} \,.$$

Onde sostituendo nella (15) si ha l' equazione

$$\Delta^2 f - \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\Delta f}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} + \varphi(\lambda\,,h)\,\frac{\Delta f}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} = 0 \,,$$

la quale per mezzo della (14) diviene:

$$\Delta^2 f + \varphi(\lambda\,,h)\,\psi(\lambda\,,h)\,\frac{\partial f}{\partial h} - \psi(\lambda\,,h)\,\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial f}{\partial h} - \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial \psi(\lambda\,,h)}{\partial \lambda} = 0 \tag{17}$$

Se la equazione (11) ha la forma:

$$F(x, y, z, \lambda) - \theta(h) = 0$$

e prendendo ψ funzione della sola h poniamo:

$$H = \theta'(h)\,\psi(h)$$

le equazioni (14) e (17) divengono

$$(18) \qquad \begin{aligned} \Delta F &= -H \frac{\partial F}{\partial \lambda} \\ \Delta^2 F &= H \varphi(\lambda, h). \end{aligned}$$

Quando la funzione f sodisfa all' equazioni (14) e (17), nelle quali φ è una funzione atta alla integrazione che sodisfa all' equazioni (8) e (10) avremo uno strato di livello compreso tra le superficie (λ, h) e $(\lambda, h+dh)$ e la sua funzione potenziale sarà:

$$V dh = \pm \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial \lambda}\, dh \int_\sigma \sqrt{\Delta\lambda}\, \frac{d\sigma}{r} = \pm \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial \lambda}\, \psi(\lambda, h) \int_\sigma \frac{dp\, d\sigma}{r}$$

Ma:

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = C\, e^{-\int \varphi(\lambda, h) d\lambda}$$

quindi:

$$V dh = \pm \frac{C}{4\pi} \psi(\lambda, h)\, e^{-\int \varphi(\lambda, h)\, d\lambda} \int_\sigma \frac{dp\, d\sigma}{r}$$

Ponendo:

$$(19) \qquad \pm C = \frac{4\pi\rho}{\psi(\lambda, h)\, e^{-\int \varphi(\lambda, h) d\lambda}}$$

avremo

$$V\, dh = \rho \int_\sigma \frac{dp\, d\sigma}{r}$$

e l' integrale:

$$\int_{h_0}^{h_1} V\,dh$$

sarà la funzione potenziale della massa distribuita tra le due superficie, $(\lambda_0\ h_0)$ e $(\lambda_0,\ h_1)$, colla densità funzione soltanto di h, cioè variabile soltanto da una all'altra delle superficie $(\lambda_0\ h)$ con h compreso tra h_0 e h_1.

§. XIV.

Funzione potenziale di una massa contenuta tra due ellissoidi omotetiche.

Una massa M sia distribuita con continuità nello spazio compreso tra due ellissoidi omotetiche. Ponendo l' origine nel centro, e prendendo per assi delle coordinate gli assi principali, l'equazioni delle due superficie saranno

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h_1^2 \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h_0^2 \tag{2}$$

Affinchè la massa M sia decomponibile in strati di livello, è necessario e sufficiente che esista un sistema doppiamente infinito di superficie, le quali per i valori di h compresi tra h_0 e h_1 sodisfacciano alle condizioni determinate nel paragrafo antecedente, e che per questi valori di h, e per uno stesso valore di λ divengano le superficie (1) e (2). Prendiamo l' equazione di questo sistema sotto la forma

$$F(x, y, z, \lambda) - h^2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - h^2 = 0\,,$$

dove A, B, C sono funzioni soltanto di λ. Dovremo determinare A, B e C in modo che siano sodisfatte le equazioni (18) del paragrafo precedente, e che per uno stesso valore di λ, che prenderemo $= 0$,

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}. \tag{3}$$

La prima dell'equazioni (18) dà

$$4(A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2) = -H\left(x^2 \frac{\partial A}{\partial \lambda} + y^2 \frac{\partial B}{\partial \lambda} + z^2 \frac{\partial C}{\partial \lambda}\right)$$

Onde:

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = -\frac{4A^2}{H}, \quad \frac{\partial B}{\partial \lambda} = -\frac{4B^2}{H}, \quad \frac{\partial C}{\partial \lambda} = -\frac{4C^2}{H}.$$

Ma:

$$H = 2h\psi(h),$$

onde se prendiamo

$$\psi(h) = \frac{2}{h},$$

sarà

$$H = 4$$

e quindi integrando

$$A = \frac{1}{c_1 + \lambda}, \quad B = \frac{1}{c_2 + \lambda}, \quad C = \frac{1}{c_3 + \lambda},$$

ed osservando che per $\lambda = 0$, debbono esser sodisfatte le (3), si ottiene

$$A = \frac{1}{a^2 + \lambda}, \quad B = \frac{1}{b^2 + \lambda}, \quad C = \frac{1}{c^2 + \lambda},$$

e quindi

$$F - h^2 = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - h^2 = 0. \tag{4}$$

La seconda dell'equazioni (18) del paragrafo precedente dà

$$(5) \qquad \frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}=2\varphi(\lambda)\ .$$

L' equazione (4) per λ maggiore della massima delle quantità a^2, b^2, c^2, può scriversi sotto la forma

$$(6) \qquad x^2+y^2+z^2-\lambda h^2+2=0$$

essendo η una funzione uguale a zero per $\lambda=\infty$. Dunque per $\lambda=\infty$ si ha una sfera di raggio infinito col centro all' origine.

Abbiamo inoltre dalla (5)

$$\varphi(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\log\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\ ,$$

onde

$$(7) \qquad \frac{\partial V}{\partial\lambda}=\frac{C}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\ .$$

Osservando che a cagione della (6), si ha

$$\lim_{r=\infty}\frac{r}{\sqrt{\lambda}}=h\,,$$

$$\lim_{r=\infty} r\sqrt{\Delta\lambda}=2\lim_{r=\infty}\frac{r}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{\lambda^2}}=0\,,$$

sarà sodisfatta la equazione (8) del paragrafo precedente

$$\lim_{r=\infty} r\sqrt{\Delta\lambda}\, e^{-\int\varphi(\lambda)d\lambda}=\lim_{r=\infty}\frac{r\sqrt{\Delta\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}=0$$

Integrando l'equazione (7) tra λ e ∞, abbiamo

$$V=C\int_\lambda^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

Ora poichè

$$\frac{1}{\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)}}=\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{\lambda^3}}$$

dove ε è uguale a zero per $\lambda=\infty$, avremo

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}=\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda\,(1+\varepsilon)}{\sqrt{\lambda^3}}=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}+\int_\lambda^\infty \frac{\varepsilon\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^3}}$$

quindi

$$\lim_{r=\infty} rV=2\,C \lim_{r=\infty} \frac{r}{\sqrt{\lambda}}=2Ch=M\,.$$

La equazione (19) del paragrafo precedente, osservando che il valore costante di λ ora è $=0$, darà

$$C=2\pi\rho\, abch$$

e quindi

$$(8) \qquad Vdh=2\pi\, ab\, c\,\rho\, h\, dh \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

dove λ è la radice positiva della equazione

$$(9) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=h^2\,.$$

Poichè la funzione potenziale ha un valore costante sopra tutta la superficie dello strato di livello, per ciò che abbiamo dimostrato nel §. XI, sarà costante in tutti i punti dello spazio racchiuso dallo strato stesso, e in questo spazio avremo come sopra lo strato

$$(10) \qquad Vdh=2\pi abc\rho hdh \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

La funzione potenziale di una massa compresa tra le due ellissoidi omotetiche (1) e (2), quando ρ è funzione soltanto di

h, si otterrà per mezzo d'integrazioni dai secondi membri delle equazioni (8) e (10). Per ciò bisogna distinguere tre parti dello spazio: quella S_a che si estende dalla superficie (1) all'infinito, quella S_b racchiusa dalla superficie (2), e quella S_i occupata dalla massa. Denoteremo con V_a, V_b, V_i rispettivamente, la funzione potenziale in queste tre parti dello spazio. Ora i punti di S_a sono esterni a tutti gli strati di livello nei quali è decomponibile la massa, quindi V_a si otterrà integrando il secondo membro della equazione (8); i punti di S_b sono interni a tutti questi strati di livello, e quindi V_b si avrà integrando il secondo membro della equazione (10). Dunque, ponendo

$$\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} = \mathrm{D} \tag{11}$$

avremo:

$$V_a = 2\pi\, abc \int_{h_0}^{h_1} \rho h\, dh \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{\mathrm{D}} \tag{12}$$

$$V_b = 2\pi\, abc \int_{h_0}^{h_1} \rho h\, dh \int_{0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\mathrm{D}} \tag{13}$$

Ora sia

$$\mathrm{H} = 1 - h^2$$

$$\rho = f(\mathrm{H})$$

Se la funzione f è atta alla integrazione, potremo porre

$$2\int_h^1 \rho h\, dh = \int_0^{\mathrm{H}} f(\mathrm{H})\, d\mathrm{H} = \mathrm{F}(\mathrm{H})$$

e quindi

$$\mathrm{F}(0) = 0 \ , \ \mathrm{F}'(\mathrm{H}) = f(\mathrm{H}) = \rho \ .$$

Integrando per parti nella equazione (12) e denotando con

λ_1 e λ_0 le radici positive della equazione (9) per i valori h_1 ed h_0 di h, avremo

$$V_a = \pi abc \left\{ F(H_0) \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{D} - F(H_1) \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{D} - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} F(H) \frac{d\lambda}{D} \right\}$$

e la (13) diverrà :

$$V_b = \pi abc \left(F(H_0) - F(H_1) \right) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{D} \, .$$

Se il punto attratto m è nello spazio S_i, conduciamo un ellissoide omotetica alle due (h_1) ed (h_0) che limitano la massa attraente, e per essa sia $h = h'$. Denotiamo con V'_a la funzione potenziale della massa compresa tra le due ellissoidi (h_0) ed (h'), rispetto alla quale il punto m si trova nello spazio esterno, e con V'_b la funzione potenziale della massa compresa tra le due ellissoidi (h') ed (h_1) rispetto alla quale il punto m è nello spazio interno, avremo

$$V'_a = \pi abc \left\{ F(H_0) \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{D} - F(H') \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{D} + \int_0^{\lambda_0} F(H) \frac{d\lambda}{D} \right\}$$

$$V'_b = \pi abc \left(F(H') \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{D} - F(H_1) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{D} \right)$$

onde:

$$V_i = \pi abc \left\{ F(H_0) \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{d\lambda}{D} - F(H_1) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{D} + \int_0^{\lambda_0} F(H) \frac{d\lambda}{D} \right\}$$

Se prendiamo:

$$h_1 = 1$$

sarà

$$F(H_1) = 0$$

e quindi

$$(14) \qquad V_a = \pi abc\left(F(H_0)\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{d\lambda}{D} - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}F(H)\,\frac{d\lambda}{D}\right)$$

$$(15) \qquad V_b = \pi abc\, F\,(H_0)\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{D}$$

$$(16) \qquad V_i = \pi\, abc\left(F(H_0)\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{d\lambda}{D} + \int_0^{\lambda_0}F(H)\,\frac{d\lambda}{D}\right)$$

Se tutta l' ellissoide la cui superficie ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

è piena di massa, sarà:

$$h_0 = 0\,,\ \lambda_0 = \infty\,,\ h_1 = 1\,,$$

e avremo:

$$(17) \qquad \begin{aligned} V_a &= \pi\, abc\int_{\lambda_1}^{\infty}F(H)\,\frac{d\lambda}{D} \\ V_i &= \pi\, abc\int_0^{\infty}F(H)\,\frac{d\lambda}{D}\,. \end{aligned}$$

dove λ_1 è la radice positiva della equazione

$$\frac{x^2}{\lambda + a^2} + \frac{y^2}{\lambda + b^2} + \frac{z^2}{\lambda + c^2} = 1$$

Se la densità ρ è costante ed $=1$, sarà:

$$F(H) = 1 - h^2$$

onde

$$V_a = \pi\, abc \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda + c^2}\right) \frac{d\lambda}{D}$$

(18)

$$V_i = \pi\, abc \int_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda + c^2}\right) \frac{d\lambda}{D}$$

Ora verifichiamo che la funzione data dalle formule (17) ha tutte le proprietà caratteristiche, le quali, per il teorema di *Dirichlet* dimostrato nel §. X, determinano completamente la funzione potenziale dell' ellissoide che abbiamo considerato.

Supponiamo che la funzione F (H) sia a un sol valore, finita e continua, e ammetta una derivata per tutti i valori compresi tra 0 ed 1; supponiamo ancora che possa essere differente da zero è divenire anche infinita ma di ordine non superiore ad $\frac{1}{2}$, per $H=0$. Essendo allora la funzione sotto il segno integrale sempre finita e continua, o solo infinita di ordine non maggiore di $\frac{1}{2}$, V sarà una funzione a un sol valore finita e continua in tutto lo spazio.

Se denotiamo con ε ed η due quantità che si conservano finite anche per $\lambda = \infty$, avremo per λ sufficientemente grande

$$1 - h^2 = 1 - \frac{r^2}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2}\ ,\quad \frac{1}{D} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} + \frac{\eta}{\sqrt{\lambda^5}}$$

Quindi

$$r\, V_a = \pi\, abc \int_{\lambda_1}^{\infty} F\left(1 - \frac{r^2}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right) \frac{r}{\sqrt{\lambda^3}} \left(1 + \frac{\eta}{\lambda}\right) d\lambda\ ,$$

ed essendo

$$\lim_{r=\infty} \frac{r}{\sqrt{\lambda}} = 1$$

si ottiene

$$\lim_{r=\infty} r\mathrm{V}_a = \pi\, abc \int_{\lambda_1}^{\infty} \mathrm{F}\left(1-\frac{r^2}{\lambda}\right)\frac{r d\lambda}{\sqrt{\lambda^3}} = 2\pi abc\, \mathrm{F}(0)$$

$$+2\pi abc \int_{\lambda_1}^{\infty} \mathrm{F}'\left(1-\frac{r^2}{\lambda}\right)\frac{r^3 d\lambda}{\sqrt{\lambda^5}}$$

e ponendo

$$\frac{r^2}{\lambda} = h^2$$

(19) $$\lim_{r=\infty} r\,\mathrm{V}_a = 2\pi abc\, \mathrm{F}(0) + 4\pi abc \int_0^1 \mathrm{F}'(1-h^2)h^2 dh$$

Osserviamo ora che lo strato compreso tra gli ellissoidi (h) e $(h+dh)$ ha il volume ugaale a

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{4}{3}\pi\, abch^3\right) = 4\pi\, abch^2\, dh$$

e quindi se la densità è

$$\rho = \mathrm{F}'(1-h^2)$$

la sua massa dm sarà

$$dm = 4\pi abc\, \mathrm{F}'(1-h^2)h^2 dh$$

e quindi per la massa totale dell'ellissoide, decomponibile in strati di livello, denotandola con M, avremo

(20) $$\mathrm{M} = 4\pi abc \int_0^1 \mathrm{F}'(1-h^2)h^2 dh$$

Osserviamo inoltre che la porzione della sezione principale nel piano xy, compresa tra due ellissi omotetiche di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2$$

corrispondenti ai valori k e $k+dk$, ha un area uguale a

$$\frac{\partial}{\partial k}\pi ab\, k^2 = 2\,\pi ab\, kdk\ ,$$

quindi se distribuiamo sopra tutta la sezione principale una massa m colla densità

$$\rho' = \frac{c\mathrm{F}(0)}{\sqrt{1-k^2}}$$

avremo

$$m = 2\,\pi abc\mathrm{F}(0)\int_0^1 \frac{kdk}{\sqrt{1-k^2}} = 2\,\pi\, abc\,\mathrm{F}\,(0) \tag{21}$$

Mediante l' equazioni (20) e (21) la equazione (19) dà

$$\lim_{r=\infty} r\mathrm{V}_a = \mathrm{M}+m\ . \tag{22}$$

Derivando l'equazioni (17) rapporto a una delle coordinate del punto attratto, per esempio rispetto ad x, abbiamo:

$$\frac{\partial \mathrm{V}_a}{\partial x} = \pi abc\int_{\lambda_1}^{\infty}\mathrm{F}'\,(\mathrm{H})\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\,\frac{\partial\lambda}{\mathrm{D}} - \frac{\pi abc\ \mathrm{F}\,(0)\frac{d\lambda_1}{dx}}{\mathrm{D}_1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial x} = \pi abc\int_0^{\infty}\mathrm{F}'\,(\mathrm{H})\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\,\frac{d\lambda}{\mathrm{D}}$$

Moltiplicando e dividendo sotto i segni integrali per $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\lambda}$, integrando per parti ed osservando che si ha

$$\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial\lambda_1}\,\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}$$

si ottiene

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_a}{\partial x} = -\pi abc \displaystyle\int_{\lambda_1}^{\infty} F(H) \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda} D}\right) d\lambda \\[2ex] \dfrac{\partial V_i}{\partial x} = \pi F(H_0)\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x} - \pi abc \displaystyle\int_{0}^{\infty} F(H) \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda} D}\right) d\lambda \end{cases}$$

Si dimostra per queste funzioni come per V_a e per V_i che sono a un sol valore finite e continue, e che all'infinito la prima moltiplicata per r si annulla. Però mentre V_a e V_i prendono valori uguali nei punti della superficie dell' ellissoide, e formano una sola funzione continua in tutto lo spazio, ciò accade per le derivate soltanto quando è $F(0) = 0$. Infatti se prendiamo anche le espressioni analoghe per le altre derivate rapporto ad y e a z, moltiplichiamo rispettivamente per $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta\lambda_1}}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}$, $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta\lambda_1}}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y}$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta\lambda_1}}\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial z}$, tanto l'equazioni che danno le derivate di V_a, quanto quelle che danno le derivate di V_i; dalla somma delle prime, sottragghiamo la somma delle seconde, osserviamo che α, β, γ sono i coseni degli angoli che la normale p alla superficie fa cogli assi e che alla superficie $\lambda_1 = 0$, $H_0 = 0$, avremo

$$(24)\qquad \frac{\partial V_a}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p} = -\pi F(0)\sqrt{\Delta\lambda_1}$$

Derivando nuovamente l'equazioni (23), abbiamo

$$\frac{\partial^2 V_a}{\partial x^2} = -\pi abc F(0)\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda} D}\right)\right]_{\lambda=\lambda_1} - \pi abc \int_{\lambda_1}^{\infty} F'(H)\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda} D}\right] d\lambda$$

$$- \pi abc \int_{\lambda_1}^{\infty} F(H)\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial x}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{1}{D}\right] d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = -\frac{\pi F'(H_0)\frac{\partial H_0^{2}}{\partial x^2}}{\frac{\partial H_0}{\partial \lambda}} + \pi F(H_0)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\right]_{\lambda=0} - \pi abc\int_0^\infty F'(H)\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right]d\lambda$$

$$-\pi abc\int_0^\infty F(H)\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial x}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{1}{D}\right]d\lambda$$

e integrando per parti il primo integrale dei secondi membri

$$\frac{\partial^2 V_a}{\partial x^2} = \pi abc\int_{\lambda_1}^\infty F(H)\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{1}{D}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right]\right\}d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = -\frac{\pi F'(H_0)\frac{\partial H_0^{2}}{\partial x^2}}{\frac{\partial H_0}{\partial \lambda}} - \pi F(H_0)\left\{\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right]\right\}_{\lambda=0}$$

$$+\pi abc\int_0^\infty\left\{F(H)\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right)\right\}d\lambda$$

ora abbiamo

$$\Delta H = 4\frac{\partial H}{\partial \lambda}\ ,\quad \Delta^2 H = 4D\frac{\partial\frac{1}{D}}{\partial \lambda}$$

onde le somme estese alle tre coordinate

$$\sum\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right] = \frac{1}{2D}\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\Delta H}{\frac{\partial H^2}{\partial \lambda^2}} + \frac{\Delta H}{\frac{\partial H^2}{\partial \lambda^2}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{1}{D} = \frac{2}{D}\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} + \frac{4}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{1}{D}$$

$$\sum\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}D}\right] = \frac{\Delta^2 H}{D\frac{\partial H}{\partial \lambda}} - \frac{1}{2D\frac{\partial H^2}{\partial \lambda^2}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\Delta H = \frac{4}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{1}{D} + \frac{2}{D}\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}$$

e sottraendo queste equazioni una dall' altra,

$$\sum \left\{ \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} D \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} D \right] \right\} = 0$$

Pertanto sommando le tre derivate seconde di V_a e di V_i otterremo

$$\Delta^2 V_a = 0$$
$$\Delta^2 V_i = -4\pi F'(H_0) = -4\pi\rho$$

Dunque se $F(0)=0$, la funzione data dalle formule (17) ha tutte le proprietà caratteristiche della funzione potenziale di un ellissoide di massa M la cui superficie ha per equazione

$$H = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \,,$$

e la cui densità è

$$\rho = F'\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) .$$

Se poi non è $F(0) = 0$, la V sarà funzione potenziale di questa massa M che riempie tutto l' ellissoide, e di un' altra m uguale a $-2\pi abc\, F(0)$ distribuita sopra la superficie colla densità:

$$\rho' = \pi F(0) \sqrt{\Delta\lambda}$$

come risulta dalle equazioni (21) e (24). Questa massa m, per ciò che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente, costituisce uno strato di livello.

Consideriamo ora una sezione principale dell' ellissoide, per esempio quella fatta dal piano xy; in essa l'ellissi omotetiche di equazione

$$k^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

ed imaginiamo un cilindro retto elementare coll' asse parallelo all'asse delle z, che ha per base un elemento infinitesimo $d\omega$ del piano xy compreso tra le due ellissi omotetiche (k) e $(k+dk)$. La porzione di massa M contenuta in questo cilindro sarà

$$dM = 2d\omega \int_0^{c\sqrt{1-k^2}} F'\left(1 - k^2 - \frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

Ponendo

$$1 - k^2 = s$$

$$z = c\sqrt{s} \, . \, \mathrm{sen}\theta \, ,$$

avremo

$$dM = 2c\sqrt{s} \; d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} F'\left(s\cos^2\theta\right) \cos\theta \; d\theta \, .$$

Poichè il valore dell'integrale definito è una funzione soltanto di s, se ne deduce che tutti i cilindri elementari colla stessa base $d\omega$ compresa tra due ellissi omotetiche (k) e $(k+dk)$ contengono masse uguali.

Se

$$F'(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \, ,$$

e α è una costante, sarà

$$F(x) = 2\alpha\sqrt{x} \, ,$$

e quindi

$$dM = 2c\alpha\pi \; d\omega \, .$$

Dunque in questo caso tutti i cilindri elementari che hanno la stessa base contengono masse uguali.

Se a è il massimo e c il minimo dei semiassi principali dell'ellissoide, ponendo:

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$$

sarà

$$k^2 < 1$$

e potremo esprimere la variabile λ per funzioni ellittiche di modulo k, per mezzo dell' equazioni

$$\lambda + a^2 = \frac{a^2 \mathrm{sn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^2 u}, \quad c = a \,\mathrm{cn}\,\alpha\ .$$

Onde:

$$\lambda + b^2 = a^2 \frac{\mathrm{sn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^2 u} \mathrm{dn}^2 u$$

$$\lambda + c^2 = a^2 \frac{\mathrm{sn}^2\alpha}{\mathrm{sn}^2 u} \mathrm{cn}^2 u$$

$$\frac{d\lambda}{\mathrm{D}} = -\frac{2du}{a \mathrm{sn}\alpha}$$

$$\mathrm{H} = 1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{a^2 \mathrm{sn}^2\alpha} \left\{ x^2 + \frac{y^2}{\mathrm{dn}^2 u} + \frac{z^2}{\mathrm{cn}^2 u} \right\}$$

ed osservando che per $\lambda = \infty$ si ha $u = 0$, dall'equazioni (17) avremo

$$\mathrm{V} = 2 \frac{\pi ab \,\mathrm{cn}\alpha}{\mathrm{sn}\alpha} \int_0^{u_1} \mathrm{F}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{a^2 \mathrm{sn}^2\alpha}\left(x^2 + \frac{y^2}{\mathrm{dn}^2 u} + \frac{z^2}{\mathrm{cn}^2 u}\right)\right) du$$

dove, se il punto è nello spazio interno all' ellissoide $u_1 = \alpha$, e se è nello spazio esterno $\mathrm{sn}^2 u_1$ è la minima radice della equazione

$$\mathrm{H} = 0\ .$$

Se l'ellissoide è di rivoluzione intorno all'asse minore cioè se $a = b$, sarà

$k^2 = 0$, $\mathrm{sn}\, u = \mathrm{sen}\, u$, $\mathrm{cn}\, u = \cos u$, $\mathrm{dn}\, u = 1$, $c = a \cos\alpha$

e quindi:

$$\mathrm{V} = 2\pi a^2 \cot\alpha \int_0^{u_1} \mathrm{F}\left(1 - \frac{\mathrm{sen}^2 u}{a^2 \mathrm{sen}^2\alpha}\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\cos^2 u}\right)\right) du$$

Se l' ellissoide è di rivoluzione intorno all' asse maggiore, e quindi

$$k^2 = 1 \ , \ \mathrm{sn}\, u = \mathrm{tangh}\, u \ , \ \mathrm{cn}\, u = \mathrm{dn}\, u = \frac{1}{\cosh u} \ , \ c = \frac{a}{\cos \mathrm{h} \alpha}$$

si ha

$$V = 2\pi c^3 \coth \alpha \int_0^{u_1} F\left(1 - \frac{\mathrm{senh}^2 u}{c^2 \,\mathrm{senh}^2 \alpha}\left(\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \left(y^2 + z^2\right)\right)\right) du$$

Se la densità è costante e uguale alla unità sarà $F(w) = w$, e per l' ellissoide di rivoluzione intorno all' asse minore, avremo

$$V = 2\pi a^3 \cot\alpha \left(u_1 - \frac{x^2 + y^2}{2a^2 \,\mathrm{sen}^2 \alpha}\left(u_1 - \mathrm{sen}\, u_1 \cos u_1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{z^2}{a^2 \,\mathrm{sen}^2 \alpha}\left(\mathrm{tang} u_1 - u_1\right)\right)$$

Per l' ellissoide di rivoluzione intorno all' asse maggiore

$$V = 2\pi c^3 \coth \alpha \left[u_1 - \frac{x^2}{c^2 \,\mathrm{senh}^2 \alpha}\left(u_1 - \mathrm{tangh}\, u_1\right)\right.$$
$$\left. - \frac{y^2 + z^2}{2c^2 \,\mathrm{senh}^2 \alpha}\left(u_1 - \mathrm{senh}\, u_1 \cosh u_1\right)\right]$$

Se l'ellissoide si riduce a una sfera, cioè se

$$a = b = c = \mathrm{R} \ ,$$

ponendo

$$\lambda + \mathrm{R}^2 = \frac{1}{u^2} \ ,$$

avremo, per lo spazio esterno,

$$V_a = 2\pi \mathrm{R}^3 \int_0^{\frac{1}{r}} F\left(1 - r^2 u^2\right) du \ ,$$

e per lo spazio interno alla sfera

$$V_i = 2\pi R^3 \int_0^{\frac{1}{R}} F(1 - r^2 u^2)\, du \ .$$

Se la densità è costante ed uguale a ρ, sarà

$$V_a = \frac{4\pi\rho R^3}{3r} \ . \quad V_i = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2$$

come abbiamo trovato nel §. III.

Dalle espressioni trovate per la funzione potenziale di una massa ellissoidica decomponibile in strati di livello, si deduce che l'azione di questa, tanto sopra un punto interno, quanto sopra un punto esterno, equivale sempre all'azione di un altro ellissoide la cui superficie passa per quel punto. Infatti, se il punto attratto m è nell'interno, e conduciamo per m un ellissoide σ' omotetica all' ellissoide σ che forma la superficie del corpo, la funzione potenziale di questo, sarà la somma della funzione potenziale della massa compresa tra σ e σ', e della funzione potenziale della massa limitata da σ'. La prima di queste, è costante perchè per tutte le posizioni di m nello spazio racchiuso da σ', è data dalla equazione (15); quindi la massa compresa tra σ e σ' non esercita azione sopra m, ed abbiamo il seguente teorema:

L'azione esercitata da un ellissoide decomponibile in strati di livello sopra un punto interno m, è uguale a quella che esercita sopra m, la sola massa che è contenuta dentro l' ellissoide che passa per m ed è omotetica alla superficie del corpo.

Se il punto attratto m è nello spazio esterno, abbiamo

$$V = \pi abc \int_{\lambda_1}^{\infty} F(H) \frac{d\lambda}{D} \ ,$$

dove λ_1 è la radice positiva della equazione

$$H = 1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda + c^2} = 0 \ .$$

Poniamo

$$\lambda = \lambda_1 + \sigma$$

$$a_1^2 = a^2 + \lambda_1 \ , \quad b_1^2 = b^2 + \lambda_1 \ , \quad c_1^2 = c^2 + \lambda_1 \ ;$$

avremo:

$$\mathrm{H} = 1 - \frac{x^2}{a_1^2 + \sigma} - \frac{y^2}{b^2 + \sigma} - \frac{z^2}{c^2 + \sigma}$$

$$\mathrm{D} = \sqrt{(a_1^2 + \sigma)(b_1^2 + \sigma)(c_1^2 + \sigma)}$$

$$\mathrm{V} = \pi a_1 b_1 c_1 \int_0^\infty \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \mathrm{F}\left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + \sigma} - \frac{y^2}{b_1^2 + \sigma} - \frac{z^2}{c_1^2 + \sigma}\right) \frac{d\sigma}{\sqrt{(a_1^2 + \sigma)(b_1^2 + \sigma)(c_1^2 + \sigma)}}$$

e quindi V è anche la funzione potenziale di una massa decomponibile in strati di livello, compresa nell'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda_1} = 1$$

la cui massa è

$$\mathrm{M}_1 = 4\pi a_1 b_1 c_1 \ . \ \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} \int_0^1 \mathrm{F}\,(1 - h^2)\, h^2\, dh = \mathrm{M}$$

e abbiamo il seguente teorema:

Un ellissoide decomponibile in strati di livello esercita, sopra un punto esterno un'azione uguale a quella che esercita sopra il medesimo punto, un'ellissoide omofocale che passa per quel punto, che contiene una ugual massa, ed è decomponibile in strati di livello.

§. XV.

Funzione potenziale di un Ellisse.

Abbiamo trovato nel paragrafo precedente, che la funzione

$$V = \pi abc \int_{\lambda_1}^{\infty} F(H) \frac{d\lambda}{D} \; ,$$

dove λ_1 è la radice positiva della equazione

$$H = 1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda + c^2} = 0 \; ,$$

in tutto lo spazio esterno all' ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \; ,$$

è la funzione potenziale di due masse, una M a tre, l' altra m a due dimensioni, la prima delle quali riempie tutto lo spazio interno all'ellissoide colla densità

$$\rho = F' \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) \; ,$$

la seconda ricuopre la superficie colla densità

$$\rho' = {}^1/_4 abc\, F(0) \left(\frac{\sqrt{\Delta\lambda}}{D}\right)_{\lambda = 0}$$

formando uno strato di livello.

Ponendo

$$c\, F(x) = f(x) \; ,$$

avremo

$$(1) \qquad V = \pi ab \int_{\lambda_1}^{\infty} f(H) \frac{d\lambda}{D}$$

$$\rho\, e = f'\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$(2) \qquad p' = \tfrac{1}{4}\, ab f(0) \left(\frac{\sqrt{\Delta\lambda}}{D}\right)_{\lambda=0} .$$

La massa *dM* contenuta nel cilindro elementare che ha la base $d\omega$ nel piano xy e l' asse parallelo all' asse delle z, sarà per ciò che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente

$$(3) \qquad dM = 2\, d\omega \sqrt{s} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f' \,(s \cos^2\theta) \cos\theta \, d\theta$$

e la massa m che forma lo strato superficiale sarà (§ XIV(21))

$$(4) \qquad m = 2\, \pi ab\, f(0)$$

Conservando per f la stessa funzione, e facendo diminuire indefinitamente il semiasse c, al limite avremo V data sempre dalla equazione (1), dove però sarà

$$(5) \quad H = 1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda}\ , \quad D = \sqrt{\lambda(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)}$$

e λ_1 sarà la radice positiva dell' equazione

$$H = 0\ ,$$

l'ellissoide si ridurrà ad uno strato di altezza infinitesima disteso sopra la sezione principale fatta nell'ellissoide stessa dal piano xy, e la massa contenuta in ogni elemento di superficie dell'ellisse sarà sempre data dalla equazione (3), quindi in ogni elemento vi sarà una massa di densità

$$(6) \qquad \frac{dM}{d\omega} = \rho(s) = 2\sqrt{s} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f' \,(s \cos^2\theta) \cos\theta \, d\theta$$

e se $f(0)$ è differente da zero, siccome in ogni elemento della ellisse verranno à coincidere due elementi della superficie dell'ellissoide, bisognerà aggiungere in ogni elemento una massa colla densità

$$\rho' = \tfrac{1}{2} ab\, f(0) \left(\frac{\sqrt{\Delta\lambda}}{\mathrm{D}}\right)_{\lambda = 0}$$

Per determinare il valore che prende questa espressione per $\lambda = 0$, osserviamo che denotando con μ_1, ν_1 le radici negative della equazione

$$\mathrm{H} = 0 \ ,$$

abbiamo:

$$(7) \quad \mathrm{HD}^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1)(\lambda - \nu_1) = \mathrm{D}^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right) .$$

Derivando questa equazione rispetto a λ e ponendo $\lambda = \lambda_1$, si ottiene

$$\frac{(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_1 - \nu_1)}{\lambda_1(\lambda_1 + a^2)(\lambda_1 + b^2)} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{\lambda_1^2} = \frac{4}{\Delta\lambda_1}$$

Onde

$$\frac{\sqrt{\Delta\lambda_1}}{\mathrm{D}_1} = \frac{2}{\sqrt{(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_1 - \nu_1)}}$$

ed al limite per $\lambda_1 = 0$

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta\lambda}}{\mathrm{D}}\right)_0 = \frac{2}{\sqrt{\mu_1 \nu_1}} \ .$$

Ma ponendo

$$s = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

dalla equazione (7) abbiamo

$$\lambda_1(\mu_1 + \nu_1) + \mu_1 \nu_1 = a^2 b^2 s - z^2(a^2 + b^2) \ ,$$

e quindi per $\lambda_1 = 0$ e $z = 0$

$$\mu_1 \nu_1 = a^2 b^2 s \ ,$$

e in conseguenza

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta\lambda}}{\mathrm{D}}\right)_0 = \frac{2}{ab\sqrt{s}}$$

$$\rho' = \frac{f(0)}{\sqrt{s}}$$

Pertanto la equazione (1), coi valori di H e D dati dalle equazioni (7), sarà la funzione potenziale di una massa distribuita sopra l' ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

colla densità

$$\rho(s) = 2\sqrt{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(s\cos^2\theta)\cos\theta\, d\theta + \frac{f(0)}{\sqrt{s}}.$$

Data $\rho(s)$ si ottiene la funzione f mediante una semplice integrazione. Infatti, poniamo

$$s\cos^2\theta = \mu$$

onde

$$2\, s\cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\, d\mu$$

e quindi

$$\rho(s) = \int_0^s \frac{f'(\mu)\, d\mu}{\sqrt{s-\mu}} + \frac{f(0)}{\sqrt{s}}$$

Ponendo ν in luogo di s, moltiplicando i due membri della equazione per $\dfrac{d\nu}{\sqrt{s-\nu}}$ e integrando tra 0 ed s, abbiamo

$$\int_0^s \frac{\rho(\nu)\, d\nu}{\sqrt{s-\nu}} = \int_0^s \frac{d\nu}{\sqrt{s-\nu}} \int_0^\nu \frac{f'(\mu)\, d\mu}{\sqrt{\nu-\mu}} + f(0)\int_0^s \frac{d\nu}{\sqrt{\nu(s-\nu)}}$$

e per il teorema di *Dirichlet*

$$\int_0^a dx \int_0^x f(xy)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(xy)\,dx$$

si possono mutare i limiti del primo integrale del secondo membro e otteniamo

$$\int_0^s \frac{\rho(\nu)\,d\nu}{\sqrt{s-\nu}} = \int_0^s f'(\mu)\,d\mu \int_\mu^s \frac{d\nu}{\sqrt{(s-\nu)(\nu-\mu)}} + f(0)\int_0^s \frac{d\nu}{\sqrt{\nu(s-\nu)}}$$

ed effettuando le integrazioni

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{\rho(\nu)\,d\nu}{\sqrt{s-\nu}}\;.$$

Abbiamo ottenuto la funzione potenziale di un ellisse come il limite di quella dell' ellissoide che si riduce all'ellisse diminuendo indefinitamente uno dei suoi semiassi. Ma per esprimersi più esattamente abbiamo così la funzione potenziale di uno strato ellittico di altezza infinitesima che in ogni cilindro che ha per base un elemento dell'area ellittica e per altezza l' altezza infinitesima dello strato contiene una massa data. La funzione potenziale di una massa a due sole dimensioni distribuita sopra l'ellisse, è il valore della funzione potenziale dell'ellissoide nel limite per il semiasse minore uguale a zero. Ora il valore di una funzione nel limite non è sempre il limite dei valori che prende la funzione prima di arrivare al limite. Dunque per dimostrare che la funzione trovata è la funzione potenziale di una massa a due sole dimensioni distribuita sopra l' ellisse colla densità supposta, e quindi la funzione potenziale di un ellisse, converrà farne la verificazione per mezzo del teorema di *Dirichlet*.

Le verificazioni delle proprietà caratteristiche, che sono comuni alle funzioni potenziali di masse a tre e a due dimensioni, che abbiamo fatto nel paragrafo precedente per la espressione che dà la funzione potenziale di un ellissoide, valgono tutte per la espressione trovata per la funzione potenziale dell'ellisse. Rimane soltanto da verificare la proprietà relativa alla discontinuità della derivata rapporto alla coordinata z, quando si attraversa la superficie.

Derivando rispetto a z la equazione (1), abbiamo

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi ab \int_{\lambda_1}^{\infty} f'(H)\,\frac{z}{\lambda}\,\frac{d\lambda}{D} - \pi ab\, f(0)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\,\frac{1}{D}\right)_{\lambda=\lambda_1}$$

Poniamo

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{\operatorname{sen}^2\theta},$$

e quindi

$$d\lambda = -\frac{2\lambda_1 \cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\,d\theta\,.$$

Osservando che dalla equazione (7) si ha

$$\frac{z}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{\mu_1\nu_1}}{ab}$$

otterremo

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} f'(H)\,\frac{z}{\lambda}\,\frac{d\lambda}{D} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'\left(\cos^2\theta\,\frac{(\lambda_1-\mu_1\operatorname{sen}^2\theta)(\lambda_1-\nu_1\operatorname{sen}^2\theta)}{(\lambda_1+a^2\operatorname{sen}^2\theta)(\lambda_1{}^2+b^2\operatorname{sen}^2\theta)}\right)\frac{\sqrt{\mu_1\nu_1}}{ab}\,.$$

$$\cdot\,\frac{\cos\theta\quad\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{(\lambda_1+a^2\operatorname{sen}^2\theta)(\lambda_1+b^2\operatorname{sen}^2\theta)}}\,d\theta$$

al limite per $\lambda_1=0$, abbiamo

$$\frac{\mu_1\nu_1}{a^2b^2} = s = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

e quindi

$$\lim_{\lambda_1=0}\int_{\lambda_1}^{\infty} f'(H)\,\frac{z}{\lambda}\,\frac{d\lambda}{D} = 2\,\frac{\sqrt{s}}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(s\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta\,.$$

Dall'equazione che determina λ_1 abbiamo

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}=\frac{2z}{\lambda_1}\frac{1}{\left(\frac{x^2}{(\lambda_1+a^2)^2}+\frac{y^2}{(\lambda_1+b^2)^2}+\frac{z^2}{\lambda_1^2}\right)}=\frac{2z}{\lambda_1}\frac{D_1}{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1-\nu_1)}$$

onde

$$\frac{1}{D_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}=\frac{2\sqrt{\mu_1\nu_1}}{ab}\frac{\sqrt{(\lambda_1+a^2)(\lambda_1+b^2)}}{(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_1-\nu_1)}$$

e passando al limite

$$\lim_{\lambda_1=0}\frac{1}{D}\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}=\frac{2}{ab\sqrt{s}}\ .$$

Sostituendo nella equazione (8) questi valori, al limite cioè sulla superficie dell'ellisse dalla parte delle z positive avremo

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-4\pi\sqrt{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(s\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta-\frac{2\pi f(0)}{\sqrt{s}}$$

Dalla parte delle z negative cangia segno il valore di $\frac{\partial V}{\partial z}$, dunque facendo la differenza dei valori verso i quali converge la derivata rispetto alla normale all' ellisse in uno stesso punto della superficie dalle due parti; questa differenza sarà

$$-4\pi\left(2\sqrt{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(s\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta+\frac{f(0)}{\sqrt{s}}\right)=-4\pi\rho$$

Dunque sono verificate tutte le proprietà caratteristiche della funzione potenziale di un ellisse, ed abbiamo il seguente teorema dovuto al prof. *Dini* (Atti dell' Accademia dei Lincei Tomo 2.° Serie II).

Un' ellisse

$$s=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\geq 0$$

di cui ogni elemento superficiale contiene una massa di densità $\rho(s)$; essendo $\rho(s)$ una funzione che per tutti i valori di s compresi tra zero e l'unità, è atta all'integrazione e sempre finita, e può soltanto divenire infinita di ordine un mezzo per $s=0$, ha per funzione potenziale

$$\text{(9)} \qquad V = \pi ab \int_{\lambda_1}^{\infty} f(H) \frac{d\lambda}{D}$$

dove

$$f(H) = \frac{1}{\pi} \int_0^H \frac{\rho(\nu) d\nu}{\sqrt{H-\nu}}$$

e λ_1 è la radice positiva della equazione

$$H = 1 - \frac{x^2}{\lambda + a^2} - \frac{y^2}{\lambda + b^2} - \frac{z^2}{\lambda} = 0 \ .$$

Se nella equazione (9) mutiamo λ in $\lambda + C^2$ e poniamo

$$A^2 = a^2 + C^2 \ , \ B^2 = b^2 + C^2 \ ,$$

il valore di V per lo stesso punto (x, y, z) non rimarrà cangiato, e quindi chiamando W la funzione V sotto la nuova forma, avremo

$$W = \pi ab \int_{\lambda_2}^{\infty} f(H') \frac{d\lambda}{D'}$$

dove:

$$H' = 1 - \frac{x^2}{\lambda + A^2} - \frac{y^2}{\lambda + B^2} - \frac{z^2}{\lambda + C^2} \, , \, D' = \sqrt{(\lambda + A^2)(\lambda + B^2)(\lambda + C^2)}$$

e λ_2 è la radice positiva della equazione

$$H' = 0 \ .$$

Ora se $f(0)=0$, W è la funzione potenziale di un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-1\leq 0$$

e di densità,

$$(10) \qquad \rho(H'_0)=\frac{f'(H_0')\sqrt{(A^2-C^2)(B^2-C^2)}}{A\,B\,C}\;,$$

quando il punto attratto è nello spazio esterno all' ellissoide.

La densità $\rho'(s)$ dell' ellisse di cui è funzione potenziale V è

$$\rho'(s)=2\sqrt{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(s\cos^2\theta)\cos\theta\, d\theta$$

e sostituendo in questa alla funzione f' il suo valore dato dalla (10) abbiamo

$$\rho'(s)=\frac{2\,A\,B\,C}{\sqrt{(A^2-C^2)(B^2-C^2)}}\sqrt{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho(s\cos^2\theta)\cos\theta\, d\theta$$

e se ne deduce il seguente teorema:

L'azione sopra i punti esterni esercitata da un' ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-1\leq 0$$

e di densità $\rho(H_0')$ è uguale a quella esercitata da una massa a due dimensioni distribuita sopra l' ellisse focale

$$\frac{x^2}{A^2-C^2}+\frac{y^2}{A^2-C^2}-1\leq 0$$

colla densità

$$\frac{2\,\mathrm{A\,B\,C}}{\sqrt{(\mathrm{A}^2-\mathrm{C}^2)\,(\mathrm{A}^2-\mathrm{C}^2)}}\sqrt{s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho(s\cos^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

dove

$$s = 1 - \frac{x^2}{\mathrm{A}^2-\mathrm{C}^2} - \frac{y^2}{\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2}$$

Quando $\rho(\mathrm{H}'_0) = 1$, la densità dell'ellisse focale che esercita la stessa azione sopra i punti esterni all'ellissoide sarà

$$\frac{\mathrm{A\,B\,C}}{\sqrt{(\mathrm{A}^2-\mathrm{C}^2)\,(\mathrm{B}^2-\mathrm{C}^2)}}\sqrt{s}$$

§. XVI.

Funzione potenziale di un' area piana omogenea.

Per determinare la funzione potenziale di un'area piana omogenea costruiamo direttamente una funzione che ne abbia le proprietà caratteristiche, cioè le proprietà che secondo il teorema di *Dirichlet* dimostrato nel § X, la determinano completamente.

Sia ω la grandezza dell' area piana, sopra cui esiste una massa attraente a due sole dimensioni, di densità uguale alla unità. Prendiamo per piano delle xy il piano dell' area ω, e sia V la funzione potenziale di questa massa.

Cominciamo dal costruire una funzione a un sol valore, finita e continua che abbia la derivata rispetto a z discontinua attraverso ω, in guisa che denotando con V_e i valori della funzione dalla parte delle z positive e con V_i quelli dalla parte delle z negative, sia al limite per $z=0$

$$(1)\qquad \frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial z} = -4\pi\,.$$

Abbiamo dimostrato nel §. XII che la funzione potenziale v di un doppio strato omogeneo disteso sopra l' area ω, gode la proprietà espressa dalla equazione

$$v_e - v_i = 4\pi \ .$$

Quindi se prendiamo la funzione

$$U = -zv \, ,$$

poichè derivando rapporto a z, abbiamo

$$\frac{\partial U}{\partial z} = v - z \frac{\partial v}{\partial z} \, .$$

al limite per $z=0$, sarà

$$\frac{\partial U_e}{\partial z} - \frac{\partial U_i}{\partial z} = -4\pi \, ,$$

Ma la funzione U non gode l'altra proprietà caratteristica di sodisfare alla equazione

(2) $$\Delta^2 = 0.$$

Infatti, effettuando le derivazioni ed osservando la equazione della pag. 57

$$\Delta^2 v = 0$$

abbiamo

$$\Delta^2 U = -2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

Ora dalla formula (7) del §. XII si deduce, come ivi abbiamo osservato

$$\frac{\partial V}{\partial z} = V \int_s \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds \, .$$

e poichè, denotando con n la normale al contorno s di ω, diretta verso l'interno, si ha

$$\frac{\partial y}{\partial s} = - \frac{\partial x}{\partial n} \, , \, \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}$$

potremo anche scrivere

$$\frac{\partial v}{\partial v} = -\int_s \left((x'-x)\frac{\partial x}{\partial n} + (y'-y)\frac{\partial y}{\partial n} \right) \frac{ds}{r^3}$$

e ponendo:

$$(3) \qquad q = (x'-x)\frac{\partial x}{\partial n} + (y'-y)\frac{\partial y}{\partial n}$$

cioè chiamando q la distanza del punto attratto (x', y', z) dalla tangente al contorno s nel punto $(x, y, 0)$, avremo

$$z\frac{\partial v}{\partial z} = \int_s q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds$$

e posto

$$(4) \qquad W = \int_s \frac{q\,ds}{r}$$

$$(5) \qquad z\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z},$$

e quindi:

$$(6) \qquad \Delta^2 U = -\frac{2}{z}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Ora calcolando $\Delta^2 W$ ed osservando l'equazioni

$$\Delta^2 q = 0\ ,\ \Delta^2 \frac{1}{r} = 0\ ,$$

$$\frac{1}{\frac{\partial r}{\partial x}}\frac{\partial x}{\partial n'} + \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial y}}\frac{\partial y}{\partial n'} = \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial z}}\frac{\partial z}{\partial n'}$$

si ottiene

$$(7) \qquad \Delta^2 W = 2\int_s \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n} \right) ds = \frac{2}{z}\frac{\partial W}{\partial z}$$

Sommando l'equazioni (6) e (7) si ottiene

$$\Delta^2 (\mathrm{U} + \mathrm{W}) = 0 .$$

Dunque se prendiamo

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{V} = \mathrm{U} + \mathrm{W} = -zv + \int_s \frac{q\,ds}{r}$$

sarà sodisfatta evidentemente alla superficie la equazione (1), ed in tutto lo spazio, al più eccettuando l' area ω, la equazione caratteristica (2). È necessario però osservare che si deve prendere positivamente il valore dell'angolo solido v_1 per z positivo, e negativamente per z negativo, in modo che il prodotto di queste quantità sia sempre positivo.

Tralasciando ora di verificare le altre proprietà caratteristiche possiamo facilmente dimostrare che la funzione V data dalla equazione (8) è la funzione potenziale dell'area ω.

Infatti, ponendo

$$u^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

abbiamo

$$u \frac{\partial u}{\partial n} = r \frac{\partial r}{\partial n} = -(x' - x) \frac{\partial x}{\partial n} - (y' - y) \frac{\partial y}{\partial n} = -q$$

e quindi

$$\mathrm{W} = \int_s \frac{q\,ds}{r} = -\int_s \frac{\partial r}{\partial n}\, ds .$$

Ma per un teorema noto di analisi

$$-\int_s \frac{\partial r}{\partial n}\, ds = \int_\omega \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) d\omega = \int_\omega \left(\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right) d\,\omega ,$$

onde

$$\mathrm{W} = \int_\omega \frac{d\omega}{r} + \int_\omega \frac{z^2}{r^3}\, d\omega$$

Ora riprendendo la espressione dell' angolo solido v data nel §. XII, coll' avvertenza fatta nella pagina precedente, avremo

$$U = z\int_\omega \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,d\omega = -\int_\omega \frac{z^2}{r^3}\,d\omega$$

e sommando si ottiene

$$V = \int_\omega \frac{d\omega}{r}$$

Derivando le equazioni (8) rispetto a z, ed osservando la (5), abbiamo

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -v$$

Dunque la componente secondo la normale al piano dell'area ω, è uguale all'angolo visuale del contorno s veduto dal punto attratto.

Dalla equazione (7) del §. XII, si deduce

$$\text{(9)}\qquad \frac{\partial v}{\partial x'} = -\int_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial n}\,ds \;,\quad \frac{\partial v}{\partial y'} = -\int_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial n}\,ds\,.$$

Derivando la (5) rispetto ad x' e ad y', abbiamo

$$\text{(10)}\qquad z\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial v}{\partial x'}\right) - \frac{\partial v}{\partial x'} = \int_s \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,ds + \int_s q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x'}\,ds$$

$$\text{(11)}\qquad z\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y'} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial v}{\partial y'}\right) - \frac{\partial v}{\partial y'} = \int_s \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,ds + \int_s q\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y'}\,ds$$

Sommando la (10) colla prima delle (9) e la (11) colla seconda delle (9) avremo

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial v}{\partial x'} - \int_s q\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,ds\right) = 0\;,\;\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial v}{\partial y'} - \int_s q\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\,ds\right) = 0.$$

Integrando e osservando che le costanti rispetto a z che costituiscono i secondi membri delle equazioni integrali sono uguali a zero, perchè per $z = \infty$, per una proprietà comune a tutte le funzioni potenziali, i primi membri si annullano, si ottengono le due equazioni

$$(12) \qquad z\frac{\partial v}{\partial x'} = \int_s q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} ds \ , \ z\frac{\partial v}{\partial y'} = \int_s q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} ds \ .$$

Ora se deriviamo la equazione (8) rispetto a x' e ad y', e poniamo mente alle (12), avremo

$$(13) \qquad \frac{\partial V}{\partial x'} = \int_s \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} \ , \ \frac{\partial V}{\partial y'} = \int_s \frac{\partial y}{\partial n} \frac{ds}{r} \ ,$$

e sostituendo alle derivate rispetto alla normale i loro valori espressi per le derivate rispetto all'arco

$$(14) \qquad \frac{\partial V}{\partial x'} = -\int_s \frac{dy}{r} \ , \ \frac{\partial V}{\partial y'} = \int_s \frac{dx}{r} \ .$$

Ora sia l'area ω un poligono di un numero n di lati, e denotiamo con $a_1, a_2, \ldots a_n$ le lunghezze di questi lati, con $q_1, q_2, \ldots q_n$ le distanze rispettive dei medesimi dalla proiezione m del punto attratto M sopra il piano dell' area ω, con $v_1, v_2, \ldots v_n$ i vertici dai quali rispettivamente incominciano i lati $a_1\ a_2 \ldots, a_n$, quando si percorre il poligono da a_1 ad a_2, da a_2 ad a_3, e così discorrendo, con $r_1, r_2, \ldots r_n$ le distanze rispettive di M da $v_1, v_2, \ldots v_n$, e infine con $w_1, w_2, \ldots w_n$ le funzioni potenziali dei lati $a_1, a_2 \ldots a_n$.

La formula (8) darà immediatamente

$$V = -zv + \Sigma\, q_i\, w_i$$

Ora applicando la formula trovata nel §. V, abbiamo

$$w_i = \log \frac{a_i'' + r_{i+1}}{a'_i + r_i} \ ,$$

ove a_i'' denota la distanza del vertice v_{i+1} dal piede p_i della perpendicolare q_i condotta da m sopra a_i, ed a'_i la distanza del vertice v_i da p_i, queste distanze prese positivamente quando ci muoviamo da p_i nella direzione da a_i ad a_{i+1}.

Se denotiamo con β_i e γ_i gli angoli che r_i ed r_{i+1} fanno col lato a_i, sarà

$$a_i'' = r_{i+1} \cos\gamma_i \ , \ a'_i = -r_i \cos\beta_i$$

$$a_i'' + r_{i+1} = 2r_{i+1} \cos^2 \frac{1}{2}\gamma_i \ , \ a_i' + r_i = 2r_i \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \beta_i$$

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta_i \cos\frac{1}{2}\beta_i}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\gamma_i \cos\frac{1}{2}\gamma_i}$$

e quindi

$$w_i = \log \frac{a_i'' + r_{i+1}}{a_i' + r_i} = \log\left(\cot\tfrac{1}{2}\beta_i \cot\tfrac{1}{2}\gamma_i\right)$$

e per la funzione potenziale avremo

$$V = -zv + \sum_1^n q_i \log\left(\cot\tfrac{1}{2}\beta_i \cot\tfrac{1}{2}\gamma_i\right)$$

dove le q_i devono essere prese positivamente, quando rimangono dalla stessa parte dell'area ω rispetto al lato a_i, e negativamente quando rimangono dalla parte opposta.

§. XVII. No

Funzione potenziale di un poliedro omogeneo.

Denotando con S lo spazio occupato da un corpo omogeneo, con ρ la densità costante e con V la sua funzione potenziale, abbiamo

$$V = \rho \int_S \frac{dS}{r} \,. \tag{1}$$

Osservando la identità facile a verificarsi

$$\Delta^2 r = \frac{2}{r} \tag{2}$$

e sostituendo nella equazione (1) il valore di $\frac{1}{r}$ tratto dalla (2), si ottiene

$$V = \frac{1}{2}\rho \int_S \Delta^2 r \, dS .$$

Ponendo nella equazione (1) del §. XI

$$U = 1 \;,\; V = r \;,$$

osservando che r è una funzione che insieme colle sue derivate prime è a un sol valore, finita e continua in tutto lo spazio S, e denotando con σ la superficie che forma il contorno dello spazio S, abbiamo

$$\int_S \Delta^2 r \, dS = - \int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n} d\sigma \,,$$

onde

$$V = - \frac{1}{2}\rho \int_\sigma \frac{\partial r}{\partial n} d\sigma .$$

Ora denotando con α, β, γ gli angoli che la normale alla superficie σ diretta verso l'interno di S, fa con i tre assi, abbiamo

$$\frac{\partial r}{\partial n} = - \frac{(x'-x)\cos\alpha + (y'-y)\cos\beta + (z'-z)\cos\gamma}{r} \,,$$

e denotando con p la distanza del punto attratto (x', y', z') dal piano tangente a σ nel punto (x, y, z), presa positivamente o negativamente secondo che il punto attratto e lo spazio S rimangono dalla stessa parte o in parti opposte del piano tangente, sarà

$$p = (x' - x)\cos\alpha + (y' - y)\cos\beta + (z' - z)\cos\gamma$$

e quindi

$$(3) \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{p}{r}$$

e finalmente

$$V = \frac{\rho}{2}\int_\sigma \frac{p d\sigma}{r}$$

Questa espressione della funzione potenziale di un corpo omogeneo è dovuta a *Gauss.*

Ponendo nelle espressioni trovate nel § VII per le derivate prime della funzione potenziale di un corpo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \, ,$$

abbiamo per un corpo omogeneo

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial x'} = \rho\int_\sigma \frac{\cos\alpha \, d\sigma}{r} \, , \; \frac{\partial V}{\partial y'} = \rho\int_\sigma \frac{\cos\beta \, d\sigma}{r} \, , \; \frac{\partial V}{\partial z'} = \rho\int_\sigma \frac{\cos\gamma \, d\sigma}{r} \, .$$

Il corpo sia un poliedro; $F_1, F_2, \ldots F_n$ siano le sue faccie ed $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ le rispettive funzioni potenziali di queste faccie quando sopra di esse è distesa una massa a due dimensioni di densità uguale alla unità; $p_1, p_2, \ldots p_n$ le distanze rispettive del punto attratto dalle medesime ed $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ gli angoli che p_s fa con i tre assi, la funzione potenziale V del poliedro sarà

$$(5) \qquad V = \frac{\rho}{2}\sum_1^n p_s \Omega_s \, ,$$

e l' equazioni (4) diverranno

$$(6)\qquad \frac{\partial V}{\partial x'}=\rho\sum_1^n \Omega_s\cos\alpha_s\ ,\quad \frac{\partial V}{\partial y'}=\rho\sum_1^n \Omega_s\cos\beta_s\ ,\quad \frac{\partial V}{\partial z'}=\rho\sum_1^n \Omega_s\cos\gamma_s$$

§. XVIII.

Funzione potenziale di un cilindro retto omogeneo.

Siano σ_1 e σ_2 le basi, h l' altezza di un cilindro retto, ρ la sua densità costante. Prendiamo il piano xy parallelo alle basi, che non incontri il cilindro, e le z positive nella direzione da σ_1 a σ_2. Siano x', y', z' le coordinate del punto attratto e $v(x', y', z')$ la funzione potenziale della proiezione σ delle basi sopra il piano xy, quando sulla medesima è distesa una massa a due dimensioni colla densità ρ. La funzione potenziale di una sezione fatta nel cilindro da un piano condotto parallelamente alla base alla distanza z dalla medesima, sarà

$$v=v(x', y', z'-z)$$

Decomponiamo il cilindro in cilindri elementari, ciascuno dei quali abbia per base una sezione parallela al piano xy e per altezza dz; se $z=a$ e $z=a+h=b$ sono l' equazioni dei piani delle due basi σ_1 e σ_2, la funzione potenziale V di tutto il cilindro sarà

$$(1)\qquad V=\rho\int_a^b v_z dz$$

La funzione v_z è a un sol valore, finita e continua in tutto lo spazio, e questo integrale dà la funzione potenziale del cilindro per qualunque posizione del punto attratto.

Siano ora X, Y, Z le componenti dell' attrazione esercitata dal cilindro sul punto x', y', z', avremo

$$(2) \qquad X = \rho \int_a^b \frac{\partial v_z}{\partial x} dz \,, Y = \rho \int_a^b \frac{\partial v_z}{\partial y} dz \,, Z = \rho \int_a^b \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \,.$$

Ma essendo

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

abbiamo

$$v_z = \rho \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \,,$$

onde

$$X = -\rho \int_a^b dz \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma, Y = -\rho \int_a^b dz \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\sigma, Z = -\rho \int_a^b dz \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\sigma.$$

Se il punto attratto è nello spazio esterno al cilindro, si può invertire l'ordine delle integrazioni, e quindi l'ultima equazione darà

$$(3) \quad Z = -\rho \int_\sigma d\sigma \int_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dz = -\rho \int_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r} + \rho \int_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r} = v_a - v_b$$

Dunque la componente dell'azione esercitata da un cilindro retto omogeneo, secondo l'asse, è uguale alla differenza delle funzioni potenziali delle due basi.

Dalle (2) ponendo mente all'equazioni (13) del §. XVI, si ottiene

$$X = \rho \int_a^b dz \int_s \frac{\partial x}{\partial n} \frac{ds}{r} = \rho \int_s \frac{\partial x}{\partial n} ds \int_a^b \frac{dz}{r} \,,$$

$$Y = \rho \int_a^b dz \int_s \frac{\partial y}{\partial n} \frac{ds}{r} = \rho \int_s \frac{\partial y}{\partial n} ds \int_a^b \frac{dz}{r} \,,$$

ed osservando la espressione della funzione potenziale di una retta omogenea data nel §. V, si ottiene

$$
(4) \quad
\begin{aligned}
X &= \rho \int_s \frac{\partial x}{\partial n} \log\left(\frac{b - z' + r_2}{a - z' + r_1}\right) ds\,, \\
Y &= \rho \int_s \frac{\partial y}{\partial n} \log\left(\frac{b - z' + r_2}{a - z' + r_1}\right) ds\,,
\end{aligned}
$$

dove r_1 e r_2 denotano le rispettive distanze del punto attratto dai punti dei contorni di σ_1 e di σ_2

Le formule (3) e (4) danno le componenti dell' attrazione anche se il punto attratto è nello spazio interno al cilindro. Infatti se il punto (x', y', z') è interno, conduciamo due piani paralleli al piano xy alle distanze $z' - \varepsilon$ e $z' + \varepsilon$, e denotiamo con σ_2' la sezione fatta dal primo, con σ_1' quella fatta del secondo, e consideriamo l' azione dei due cilindri, uno di basi σ_1, σ_2', l'altro di basi σ_1', σ_2, sopra il punto (x', y', z') esterno ad ambedue, distinguendo coll'indice ε le componenti di questa azione, avremo

$$
(5) \quad
\left\{
\begin{aligned}
X_\varepsilon &= \int_s \frac{\partial x}{\partial n} \log\left(\frac{-\varepsilon + r_2'}{a - z' + r_1}\right)\left(\frac{b - z' + r_2}{\varepsilon + r_1'}\right) ds \\
Y_\varepsilon &= \int_s \frac{\partial y}{\partial n} \log\left(\frac{-\varepsilon + r_2'}{a - z' + r_1}\right)\left(\frac{b - z' + r_2}{\varepsilon + r_1'}\right) ds \\
Z_\varepsilon &= v_a - v_{z'-\varepsilon} + v_{z'+\varepsilon} - v_b
\end{aligned}
\right.
$$

Passando al limite per $\varepsilon = 0$, a cagione della continuità della funzione v si ottiene

$$
\lim_{\varepsilon = 0} X_\varepsilon = X = \int_s \frac{\partial x}{\partial n} \log\left(\frac{b - z' + r_2}{a - z' + r_1}\right) ds
$$

$$
\lim_{\varepsilon = 0} Y_\varepsilon = Y = \int_s \frac{\partial y}{\partial n} \log\left(\frac{b - z' + r_2}{a - z' + r_1}\right) ds
$$

$$
\lim_{\varepsilon = 0} Z_\varepsilon = Z = v_a - v_b\,.
$$

Se deriviamo rispetto ad x' la prima dell'equazioni (5), rispetto ad y' la seconda e sommiamo, avremo

$$\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial x'}+\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial y'}=\int_s\left((x'-x)\frac{\partial x}{\partial n}+(y'-y)\frac{\partial y}{\partial n}\right)\left(\frac{1}{r_2'\,(r_2'-\varepsilon)}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{r_2\,(b-z'+r_2)}-\frac{1}{r_1\,(a-z'+r_1)}-\frac{1}{r_1'\,(r'+\varepsilon)}\right)ds$$

Osservando le equazioni

$$(x'-x)\frac{\partial x}{\partial n}+(y'-y)\frac{\partial y}{\partial n}=-r_2\frac{\partial r_2}{\partial n}=-r_1\frac{\partial r_1}{\partial n}=-r'_1\frac{\partial r'_1}{\partial n}=-r'_2\frac{\partial r'_2}{\partial n},$$

si ottiene

$$\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial x'}+\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial y'}=-\rho\int_s\frac{\partial}{\partial n}\log\left[\frac{(r'_2-\varepsilon)}{(a-z'+r_1)}\;\frac{(b-z'+r_2)}{(\varepsilon+r'_1)}\right]ds$$

Ma per un noto teorema di analisi, essendo $r_l^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+l^2$, si ha

$$-\int_s\frac{\partial}{\partial n}\log(r_l+l)\,ds=\int_\sigma\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(r_l+l)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(r_l+l)\right)d\sigma=-\int_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial l}d\sigma$$

onde

$$\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial x'}+\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial y'}=\frac{\partial v_b}{\partial z'}-\frac{\partial v_{z+\varepsilon}}{\partial z'}+\frac{\partial v_{z-\varepsilon}}{\partial z'}-\frac{\partial v_a}{\partial z'}$$

Passando al limite per $\varepsilon=0$ si ottiene

$$\frac{\partial X}{\partial x'}+\frac{\partial Y}{\partial y'}=\frac{\partial v_b}{\partial z'}-\frac{\partial v_a}{\partial z'}=-4\pi\rho$$

ed osservando l'ultima delle (5):

$$\frac{\partial X}{\partial x'}+\frac{\partial Y}{\partial y'}+\frac{\partial Z}{\partial z'}=-4\pi\rho\,.$$

§. XIX.

Principio delle imagini di Thomson.

Il principio delle imagini di *W. Thomson* dà il modo di dedurre dalla funzione potenziale di una massa M, distribuita in uno spazio limitato S con una densità ρ in ciascun punto determinata, le funzioni potenziali di altre masse M_1 in altri spazi T che si ottengono trasformando lo spazio S, con densità ρ_1 che si deducono inmodo determinato dal valore di ρ.

Prendiamo un punto O per origine di un sistema di assi rettilinei ortogonali, e ad ogni punto di coordinate x_1, x_2, x_3 facciamone corrispondere un altro di coordinate: y_1, y_2, y_3, per mezzo di tre equazioni:

$$(1) \quad y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3), \; y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3), \; y_3 = y_3(x_1, x_2, x_3).$$

Se per ogni sistema di valori delle x, si ricava dalle equazioni (1) un sistema di valori delle y, e uno soltanto, e viceversa, avremo una trasformazione univoca dello spazio, e per ogni figura data un' altra corrispondente in modo determinato punto per punto.

La funzione potenziale V di una massa che occupa uno spazio limitato S (sia S a una, a due o a tre dimensioni) in tutto lo spazio S′ che si ottiene escludendo lo spazio S, sodisfa alla equazione

$$(2) \qquad \Delta^2 V = 0 .$$

Sostituendo nella funzione V le x espresse per le y mediante l' equazioni (1), V diverrà una funzione V_1 delle y, e se con T denotiamo la imagine di S, e con T′ la imagine di S′ in tutto lo spazio T′ sarà sodisfatta la trasformata della equazione (2).

Per ciò che abbiamo dimostrato nel §. II, se

$$\Sigma_s \frac{\partial y_m}{\partial x_s}\frac{\partial y_n}{\partial x_s}=0\ ,\quad \Sigma_s\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_s}\right)^2=\Sigma_s\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_s}\right)^2=\Sigma_s\left(\frac{\partial y_3}{\partial x_s}\right)^2=h^2$$

avremo

$$\Delta^2 V=h^3\Sigma_s \frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial V_1}{\partial y_s}\right)=h\Sigma_s\left(h\frac{\partial^2 V_1}{\partial y_s^2}-\frac{\partial h}{\partial y_s}\frac{\partial V_1}{\partial y_s}\right).$$

Ponendo

$$\Delta_1^2=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}$$

si ha identicamente

$$\Sigma_s\left(h\frac{\partial^2 V_1}{\partial y_s^2}-\frac{\partial h}{\partial y_s}\frac{\partial V_1}{\partial y_s}\right)=\sqrt{h^3}\left[\Delta_1^2\left(\frac{V_1}{\sqrt{h}}\right)-V_1\,\Delta_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)\right]$$

e quindi

$$\Delta^2 V=\sqrt{h^5}\left[\Delta_1^2\left(\frac{V_1}{\sqrt{h}}\right)-V_1\,\Delta_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)\right],$$

Se le equazioni (1) sono tali che il valore di h sodisfaccia alla equazione

(3) $$\Delta_1^2\frac{1}{\sqrt{h}}=0\ ,$$

sarà

$$\Delta^2 V=\sqrt{h^5}\,\Delta^2_1\left(\frac{V_1}{\sqrt{h}}\right)\ ,$$

e in tutto lo spazio T' sarà sodisfatta l'equazione

(5) $$\Delta_1^2\left(\frac{V_1}{\sqrt{h}}\right)=0\ ;$$

e poichè nello spazio S, se questo è a tre dimensioni,

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho ,$$

nello spazio T imagine di S, avremo

$$(6) \qquad \Delta^2{}_1\left(\frac{V_1}{\sqrt{h}}\right) = -\frac{4\pi\rho_1}{\sqrt{h^5}} .$$

La equazione (3) sarà sodisfatta prendendo

$$h = \frac{r_1^2}{c^2} , \quad r_1^2 = \Sigma_s (y_s - a_s)^2 ,$$

e ponendo

$$(7) \qquad U = \frac{V_1}{r_1} ,$$

l'equazioni (5) e (7) daranno nello spazio T'

$$(8) \qquad \Delta_1{}^2 U = 0 ,$$

e nello spazio T

$$(9) \qquad \Delta_1{}^2 U = -\frac{4\pi c^4 \rho_1}{r_1^5} .$$

La determinazione della sostituzione (1) che rende

$$h = \frac{r_1^2}{c^2} ,$$

dipende, come abbiamo dimostrato nel §. II, dalla trasformazione della forma differenziale

$$ds^2 = \Sigma_s dx_s^2 ,$$

nell'altra

$$\Sigma_s \frac{1}{h_s^2} dy_s^2 = \frac{c^4}{r_1^4} \Sigma_s dy_s^2 .$$

Poichè abbiamo identicamente

$$\frac{c^4}{r_1^4} \Sigma_s dy_s^2 = c^4 \Sigma_s \left(d \frac{y_s - a_s}{r_1^2}\right)^2 ,$$

per ottenere questa trasformazione, basterà prendere

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
x_1 - a_1 &= c^2 \frac{y_1 - a_1}{r_1^2}, \\
x_2 - a_2 &= c^2 \frac{y_2 - a_2}{r_1^2}, \\
x_3 - a_3 &= c^2 \frac{y_3 - a_3}{r_1^2}.
\end{aligned}
$$

Quadrando, sommando e ponendo

$$r^2 = \Sigma_s (x_s - a_s)^2,$$

avremo

$$r_1 r = c^2.$$

Quindi, denotando con O il punto che ha per coordinate a_1, a_2, a_3 e imaginando una sfera di raggio uguale a c, col centro nel punto O, il raggio della sfera sarà media proporzionale tra le distanze dei punti corrispondenti dal centro O.

Dall'equazioni (10) si deduce anche

$$\frac{y_1 - a_1}{x_1 - a_1} = \frac{y_2 - a_2}{x_2 - a_2} = \frac{y_3 - a_3}{x_3 - a_3} = \frac{r_1}{r}.$$

Onde i punti corrispondenti si trovano in linea retta col centro O.

Con questa trasformazione che suol chiamarsi *trasformazione per raggi vettori reciproci* o anche semplicemente *inversione*, lo spazio interno alla sfera è imagine dello spazio esterno e viceversa; una sfera qualunque ha per imagine un' altra sfera, e un piano ha per imagine una sfera che passa per il punto O e viceversa.

Poichè denotando con ds e con ds_1 due elementi lineari corrispondenti, abbiamo

$$ds^2 = \Sigma_s dx_s^2 = \frac{c^4}{r_1^4} \Sigma_s dy_s^2 = \frac{c^4}{r_1^4} ds_1^2,$$

sarà

$$ds = \frac{c^2}{r_1^2} ds_1 ,$$

e la trasformazione (10) conserverà la similitudine nelle parti infinitesime.

L' equazioni (8) e (9) ci dicono che la funzione U gode una delle proprietà caratteristiche della funzione potenziale di una massa che occupa lo spazio T imagine di S, colla densità $\frac{c^4}{r_1^5}\rho_1$. Dimostriamo ora che la U gode anche tutte le altre proprietà caratteristiche di questa funzione potenziale.

La funzione $U = \frac{V_1}{r_1}$ si conserva a un sol valore finita e continua in tutto lo spazio, perchè tale si conserva V, e per $r_1 = 0$, essendo V la funzione potenziale della massa M, abbiamo

$$\lim_{r_1=0} \frac{V_1}{r_1} = \frac{1}{c^2} \cdot \lim_{r=\infty} rV = \frac{M}{c^2} .$$

All' infinito U si annulla e moltiplicata per r_1 converge verso la massa M_1 che occupa lo spazio T colla densità: $\frac{c^4}{r_1^5}\rho$. Infatti, abbiamo

$$\lim_{r_1=\infty} r_1 U = \lim_{r_1=\infty} V_1 = \lim_{r_1=0} V = \int \frac{\rho \, dS}{r}$$

Ora, per un noto teorema sulla trasformazione degl' integrali multipli, si ha

$$\int_S \frac{\rho \, dS}{r} = \int\int\int \frac{\rho \, dx_1 dx_2 dx_3}{r} = \int\int\int \frac{\rho c^6}{r_1^6 r} dy_1 dy_2 dy_3 = c^4 \int_T \frac{\rho_1 \, dT}{r_1^5} = M_1$$

onde

$$\lim_{r_1=\infty} r_1 U = M_1 .$$

Si può asserire che le derivate prime di U si conservano finite e continue in tutto lo spazio fuori che nel punto O, perchè tali si conservano le derivate di V, e nel punto O moltiplicate per r_1^2, convergono a zero. Infatti, abbiamo

$$(12) \qquad \lim_{r_1=0} r_1^2 \frac{\partial U}{\partial r_1} = \lim_{r=\infty} \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial rV}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_1} = \lim_{r=\infty} -\frac{\partial rV}{\partial r} = 0 .$$

All'infinito le derivate di U moltiplicate per r_1^2 convergono verso quantità finite, poichè

$$\lim_{r_1=\infty} r_1^2 \frac{\partial U}{\partial r_1} = \lim_{r=0} -\frac{\partial rV}{\partial r} .$$

Così abbiamo dimostrato che la funzione U ha tutte le proprietà caratteristiche della funzione potenziale della massa M_1 in tutto lo spazio fuori che nel punto O. Quindi applicando il metodo esposto nel § X. per dimostrare l' identità di queste due funzioni, è necessario escludere questo punto con una sfera σ che lo abbia per centro, e che abbia un raggio r_1 piccolo quanto si vuole, e agl'integrali doppi trovati alla pag. 37, deve aggiungersi un integrale

$$\int_\sigma W \frac{\partial W}{\partial r_1} d\sigma = \int_\omega W \frac{\partial W}{\partial r_1} r_1^2 \, d\omega$$

che a cagione della equazione (12), è eguale a zero. Quindi le due funzioni saranno identiche in tutto lo spazio ad esclusione del punto O; ma non potrebbero differire in questo punto altro che se una di esse avesse in quel punto una discontinuità che potesse togliersi, mutandovi il suo valore, il che non può essere della funzione U_1 che è finita e continua anche in quel punto. Da questo si deduce che la funzione U è la funzione potenziale della massa M che occupa lo spazio T_1 colla densità ρ_1.

Poichè le proprietà caratteristiche delle funzioni potenziali le abbiamo dimostrate nella ipotesi che non vi sia massa all'infinito, sarà necessario che il punto O sia esterno alla massa M, perchè altrimente lo spazio T che contiene la massa M_1 si estenderebbe all' infinito. Così abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Se V è la funzione potenziale di una massa M che occupa uno spazio S a tre dimensioni colla densità ρ, O un punto esterno a questa massa, V_1 ciò che diviene V quando vi si fa una trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto a una sfera col centro in O e di raggio c, $\frac{V_1}{r_1}$ sarà la funzione potenziale di una massa che occupa lo spazio T imagine di S, colla densità ρ_1 e nei punti corrispondenti avremo

$$\rho_1 = \frac{c^4}{r_1^5}\rho ,$$

essendo r_1 la distanza dei punti di T da O.

Se lo spazio S è a due sole dimensioni, vale a dire è una superficie, delle proprietà caratteristiche della funzione potenziale V bisogna escludere quella data dalla equazione

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho ,$$

e sostituirvi l' altra:

$$\frac{\partial V_a}{\partial p} - \frac{\partial V_b}{\partial p} = -4\pi\rho . \tag{13}$$

Ora a cagione della proprietà di cui gode la trasformazione per raggi vettori reciproci di conservare la similitudine nelle parti infinitesime, gli elementi delle normali nei punti corrispondenti delle due superficie S e T sono pure corrispondenti, e distinguendo le quantità relative a T coll' indice 1, e osservando la equazione (11) abbiamo

$$\frac{\partial V_a}{\partial p} = \frac{r_1^2}{c^2}\frac{\partial (V_1)_a}{\partial p_1} = \frac{r_1^3}{c^2}\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{V_1}{r_1}\right)_a + \frac{r_1 V_a}{c^2}\frac{\partial r_1}{\partial p_1} ,$$

$$\frac{\partial V_b}{\partial p} = \frac{r_1^2}{c^2}\frac{\partial (V_1)_b}{\partial p_1} = \frac{r_1^3}{c^2}\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{V_1}{r_1}\right)_b + \frac{r_1 V_b}{c^2}\frac{\partial r_1}{\partial p_1} ,$$

Sottraendo ed osservando la (13) si ottiene

$$\frac{\partial U_a}{\partial p_1} - \frac{\partial U_b}{\partial p_1} = -4\pi \frac{c^2}{r_1^3}\rho$$

ed abbiamo il seguente teorema.

Se V è la funzione potenziale di una massa a due dimensioni distesa sopra una superficie S colla densità ρ, O un punto esterno a questa massa, V_1 ciò che diviene V quando vi si fa una trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto a una sfera col centro in O e col raggio c, $\frac{V_1}{r_1}$ sarà la funzione potenziale di una massa a due dimensioni distesa sopra la superficie T imagine di S, colla densità ρ' e nei punti corrispondenti avremo

$$\rho' = \frac{c^2}{r_1^3}\rho$$

essendo r_1 la distanza dei punti di T dal punto O.

Se lo spazio S è a una sola dimensione, cioè se è una linea, delle proprietà caratteristiche non esistono più quelle date dall'equazioni (6) e (13), e si hanno invece le altre espresse dalle equazioni

$$\lim_{t=0} \frac{V}{\log t} = -2\rho$$

$$\lim_{t=0} t\frac{\partial V}{\partial t} = -2\rho\ .$$

Ora a cagione della similitudine nelle parti infinitesime, distinguendo coll' indice 1 le quantità relative all' imagine, gli elementi delle normali t e t' alla linea e alla sua imagine nei punti corrispondenti, sono pure corrispondenti e quindi

$$\lim_{t=0} \frac{V}{\log t} = \lim_{t_1=0} \frac{V_1}{\log t_1} = -2\rho$$

e dividendo per r_1

$$\lim_{t_1=0} \frac{U}{\log t_1} = -\frac{2\rho}{r_1}$$

A cagione dell'equazione (11) abbiamo

$$dt = \frac{c^2}{r_1^{\,2}} dt_1$$

quindi

$$\frac{1}{r_1} \lim_{t=0} t\frac{\partial V}{\partial t} = \lim_{t=0} t_1\frac{\partial V_1}{\partial t_1}\frac{1}{r_1} = \lim_{t_1=0} t_1\frac{\partial U}{\partial t_1} + \lim_{t_1=0} \frac{t_1}{r_1^{\,2}} V_1\frac{\partial r_1}{\partial t_1} =$$

$$= \lim_{t_1=0} t_1\frac{\partial U}{\partial t_1} = -\frac{2\rho}{r_1}$$

e quindi il teorema seguente.

Se V è la funzione potenziale di una massa a una sola dimensione distribuita sopra una linea S colla densità ρ, V_1 ciò che diviene V per una trasformazione per raggi vettori reciproci, $\frac{V_1}{r_1}$ sarà la funzione potenziale di una massa ad una sola dimensione distribuita sopra la imagine di S, colla densità ρ' e tra le densità nei punti corrispondenti si avrà la relazione

$$\rho' = \frac{\rho}{r_1} .$$

La possibilità di dedurre col principio delle imagini altre funzioni potenziali da una funzione potenziale data, dipende dalla proprietà che gode la trasformazione, di conservare la similidine delle parti infinitesime. Ora *Liouville* (*) ha osservato che nello spazio Euclideo è questa la sola trasformazione (se si eccettua la trasformazione lineare) che goda di un tale proprietà, quindi le altre trasformazioni geometriche non potrebbero dare altri principi che servissero allo stesso scopo.

(*) *Liouville*, Journal de Matematiques, §. XV.

§. XX.

Potenziali.

Siano: $m_1, m_2, \ldots m_n$ le masse dei punti di un sistema A; x_i, y_i, z_i le coordinate cartesiane del punto m_i, ed r_{si} la distanza reciproca dei punti m_s ed m_i. Siano: $m_1', m_2', \ldots m'_i$ le masse dei punti di un altro sistema A_1, x_i', y_i', z_i' le coordinate del punto m'_i ed r'_{si} la distanza del punto m_s dal punto m'_i. Se i punti del sistema A si attraggono scambievolmente secondo la legge di *Newton*, ed X_s, Y_s, Z_s, denotano le componenti secondo tre assi dell' azione esercitata dagli altri punti del sistema A sopra il punto m_s, avremo:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
X_s &= m_s \Sigma_i m_i \frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial x_s}, \\
Y_s &= m_s \Sigma_i m_i \frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial y_s}, \\
Z_s &= m_s \Sigma_i m_i \frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial z_s},
\end{aligned}
$$

dove il segno sommatorio deve estendersi a tutti i valori dell'indice i escluso l'indice $i=s$. Moltiplicando l'equazioni (1) rispettivamente per dx_s, dy_s, dz_s e sommando, si ha

$$
\begin{aligned}
\Sigma_s (X_s\, dx_s + Y_s\, dy_s + Z_s\, dz_s) &= \Sigma_s m_s \Sigma_i m_i \left(\frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial y_s} dy_s + \right. \\
&\left. \frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial z_s} dz_s \right) = \Sigma_{is} m_s m_i \left(\frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial (x_s - x_i)} d(x_s - x_i) + \frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial (y_s - y_i)} \right. \\
&\left. d(y_s - y_i) + \frac{\partial \frac{1}{r_{si}}}{\partial (z_s - z_i)} d(z_s - z_i) \right) = d\, \Sigma_{si} \frac{m_s m_i}{r_{si}}\,.
\end{aligned}
$$

Integrando tra i valori $x_s - x_i = \infty$, $y_s - y_i = \infty$, $z_s - z_i = \infty$, e i valori di $x_s - x_i$, $y_s - y_i$, $z_s - z_i$ nella configurazione A, avremo

$$(2) \qquad \int \Sigma_s (X_s\, dx_s + Y_s\, dy_s + Z_s\, dz_s) = \Sigma_{is} \frac{m_s\, m_i}{r_{si}} .$$

La funzione

$$(3) \qquad P = \Sigma_{si} \frac{m_s\, m_i}{r_{si}}$$

si chiama il potenziale del sistema A sopra sè stesso, o semplicemente il potenziale del sistema A, e dalla equazione (2) si deduce che è uguale al lavoro fatto dalle forze di attrazione nel passaggio del sistema dalla configurazione in cui tutti i punti sono a distanza infinita tra loro e le forze sono nulle, alla configurazione a cui il potenziale si riferisce. Poichè questo valore è indipendente dalle configurazioni intermedie che ha preso il sistema in questo passaggio, ne segue che il lavoro fatto dalle forze è pure indipendente dalle configurazioni intermedie, dipende solo dallo stato finale e non dagli stati intermedi.

Poichè

$$P = \Sigma_{is} \frac{m_s m_i}{r_{si}} = \frac{1}{2} \Sigma_s\, m_s\, \Sigma_i \frac{m_i}{r_{si}} ,$$

posto

$$V_s = \Sigma_i \frac{m_i}{r_{si}} ,$$

si ha

$$(4) \qquad P = \frac{1}{2} \Sigma_s m_s V_s ;$$

e quindi il potenziale di un sistema sopra sè stesso è uguale alla semisomma dei prodotti delle masse dei punti per i valori della funzione potenziale del sistema in questi medesimi punti.

Se ciascuno dei punti m_i' attrae un punto qualunque m_s

secondo la legge di *Newton*, ed X_s', Y_s', Z_s' denotano le componenti secondo i tre assi, dell'attrazione esercitata dal sistema A_1 sopra il punto m_s del sistema A, avremo

$$X_s' = m_s \Sigma_i m'_i \frac{\partial \frac{1}{r'_{si}}}{\partial x_s},$$

$$Y_s' = m_s \Sigma_i m'_i \frac{\partial \frac{1}{r'_{si}}}{\partial y_s},$$

$$Z_s' = m_s \Sigma_i m'_i \frac{\partial \frac{1}{r'_{si}}}{\partial z_s},$$

Moltiplicando al solito rispettivamente le tre equazioni per dx_s, dy_s, dz_s e sommando, si ottiene

$$\Sigma_s(X_s' dx_s + Y_s' dy_s + Z_s' dz_s) = \Sigma_s \Sigma_i m_s m_i' \left(\frac{\partial \frac{1}{r'_{si}}}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial \frac{1}{r'_{si}}}{\partial y_s} dy_s + \frac{\partial \frac{1}{r'_{si}}}{\partial z_s} dz_s \right).$$

Ritenendo costanti x_i', y_i', z_i', e integrando rispetto alle variabili x_s, y_s, z_s dalla posizione di A in cui si ha $x_s = y_s = z_s = \infty$ ai valori che hanno le coordinate nella posizione attuale del sistema A, abbiamo

$$(5) \qquad \int \Sigma_s (X_s' dx_s + Y_s' dy_s + Z_s' dz_s) = \Sigma_i \Sigma_s \frac{m_s m_i'}{r'_{si}} = Q \ .$$

La funzione

$$(6) \qquad Q = \Sigma_s \Sigma_i \frac{m_s m_i'}{r_{si}'}$$

si chiama il potenziale del sistema A_1 sopra il sistema A, e dalla equazione (5) si deduce che questo potenziale è uguale al lavoro fatto dalle forze di attrazione di A_1 sopra i punti di A, nel passaggio del sistema A da una distanza infinita da A_1, alla posizione attuale, e questo lavoro è indipendente dalle posizioni intermedie per le quali esso è passato, dipende solo dalla posizione finale.

Se poniamo

$$V_s' = \Sigma_i \frac{m'_i}{r'_{si}},$$

avremo:

$$Q = \Sigma_s m_s V_s'. \tag{7}$$

Quindi il potenziale del sistema A_1 sopra il sistema A è uguale alla somma dei prodotti delle masse dei punti di A, per i valori che in questi punti prende la funzione potenziale del sistema A_1.

Poichè il potenziale di A_1 sopra A è simmetrico rispetto ai due sistemi, ne segue che il potenziale di A_1 sopra A è uguale al potenziale di A sopra A_1, e quindi se V_i è il valore della funzione potenziale di A nel punto m_i', dalla equazione (7) si deduce

$$\Sigma m_s V_s' = \Sigma' m_i' V_i. \tag{8}$$

Se le masse m_i riempiono uno spazio S_i, colla densità ρ e le masse m'_i riempiono uno spazio S' colla densità ρ', l' equazioni (4), (7) e (8) diverranno

$$P = \frac{1}{2}\int_S \rho V dS, \tag{9}$$

$$Q = \int_S \rho V' dS, \tag{10}$$

$$\int_S \rho V' dS = \int_{S'} \rho' V dS'. \tag{11}$$

Essendo

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

e denotando con ρ la densità nel punto (x, y, z), con ρ' la densità nel punto (x', y', z'), avremo nella equazione (9)

$$V = \int_S \frac{\rho\, dS}{r}$$

e nella (10)

$$V' = \int_{S'} \frac{\rho dS}{r}$$

quindi

$$P = \frac{1}{2} \int_S \rho\, dS \int_S \frac{\rho dS}{r}$$

$$Q = \int_S \rho\, dS \int_S \frac{dS}{r}$$

Se abbiamo altri due sistemi B e B′ che occupano spazi uguali rispettivamente ad S ed S′ colle densità

$$\rho_1 = c\rho \ , \ \rho_2 = c\rho'$$

e P_1 è il potenziale del sistema B, e Q_1 è il potenziale del sistema B′ sopra B, avremo evidentemente

$$P_1 = \frac{c^2}{2} \int_S \rho dS \int_S \frac{\rho dS}{r} = c^2 P$$

$$Q_1 = \frac{cc'}{2} \int_S \rho\, dS \int_{S'} \frac{\rho'\, dS}{r} = cc'\, Q$$

Dalle quali equazioni si deducono immediatamente i due teoremi seguenti:

Se due sistemi di masse occupano lo stesso spazio, o spazi uguali con densità proporzionali, i loro potenziali staranno tra loro come i quadrati delle densità.

Se due sistemi di masse, occupano spazi uguali a quelli occupati da due altri sistemi, e le densità dei primi sono rispettivamente proporzionali alle densità dei secondi sistemi, il potenziale dei primi sistemi l' uno sopra l'altro, sta al potenziale dei secondi sistemi l'uno sopra l' altro, come il prodotto delle densità dei primi sta al prodotto delle densità dei secondi sistemi.

Se il sistema di masse che ha per funzione potenziale V è composto di masse a tre dimensioni che occupano uno spazio S e di masse a due dimensioni che sono distribuite sopra un aggregato di superficie, alcune chiuse che denoteremo con σ, altre aperte che denoteremo con γ, e con ρ denotiamo al solito la densità, il potenziale di tutto il sistema sarà

$$P = \frac{1}{2}\int_S V\rho\, dS + \frac{1}{2}\int_\sigma V\rho\, d\sigma + \frac{1}{2}\int_\gamma V\rho\, d\sigma \,. \tag{12}$$

Poiche la funzione V insieme colle sue derivate prime è a un sol valore, finita e continua in tutto lo spazio, e soddisfa alla equazione

$$\Delta^2 V = 0$$

per tutto fuori che nello spazio S, dove

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho \,,$$

avremo

$$\frac{1}{2}\int_S V\rho\, dS = -\frac{1}{8\pi}\int V\Delta^2 V\, dS \tag{13}$$

e potremo estendere l' ultimo integrale a tutto lo spazio.

Sopra alle superficie chiuse σ, denotando con V_e il valore della funzione potenziale nello spazio esterno, e con V_i quello nello spazio interno a σ, e con p la normale a σ diretta verso l'esterno, abbiamo

$$\frac{\partial V_e}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p} = -4\pi\rho$$

onde

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\int_\sigma V\rho\, d\sigma = -\frac{1}{8\pi}\int_\sigma V\frac{\partial V_e}{\partial p}\, d\sigma + \frac{1}{8\pi}\int_\sigma V\frac{\partial V_i}{\partial p}\, d\sigma$$

Ad ogni superficie aperta γ potremo sostituire una superficie chiusa α luogo geometrico dell' estremità delle normali nei differenti punti di γ, prolungate di lunghezze infinitesime dalle due parti, e se denotiamo con p la normale a γ da una parte determinata che denoteremo con A, e con $\frac{\partial V_b}{\partial p}$ il valore della derivata di V secondo la normale p, in un punto di α che rimane dalla parte A e con $\frac{\partial V_i}{\partial p}$ il valore della derivata presa secondo la stessa p nel punto di α che si trova sopra la stessa normale dalla parte opposta, avremo

$$\frac{\partial V_a}{\partial p} - \frac{\partial V_b}{\partial p} = -4\pi\rho$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\int_\gamma V\rho\, d\gamma = -\frac{1}{8\pi}\int V\frac{\partial V_a}{\partial p}\, d\alpha + \frac{1}{8\pi}\int V\frac{\partial V_b}{\partial p}\, d\alpha$$

dove il primo integrale deve estendersi a una parte di α ove la derivata è presa secondo la normale diretta verso l'esterno, e il secondo integrale dev' estendersi all'altra parte di α in cui la derivata è presa secondo la normale verso lo spazio interno a γ. Potremo mutare il segno al secondo integrale e prendere anche in esso la normale verso l' esterno, e avremo

$$(15) \qquad \frac{1}{2}\int_\gamma V\rho\, d\sigma = -\frac{1}{8\pi}\int_\alpha V\frac{\partial V}{\partial p}\, d\sigma$$

Sostituendo i valori (13), (14) e (15) nella formula (12) si ottiene

$$(16)\quad P = -\frac{1}{8\pi}\int_\sigma V\frac{\partial V_e}{\partial p}\,d\sigma + \frac{1}{8\pi}\int_\sigma V\frac{\partial V_i}{\partial p}\,d\sigma - \frac{1}{8\pi}\int_\alpha V\frac{\partial V}{\partial p}\,d\sigma$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int V\Delta^2 V dS$$

dove l' ultimo integrale può estendersi a tutto lo spazio.

Ora se denotiamo con S_e lo spazio limitato da tutte le superficie σ, α e da una sfera s di raggio infinito, con S_i lo spazio interno alle superficie σ, poniamo $V=U$ nella equazione (1) del §. XI, e vi prendiamo per lo spazio S lo spazio S_e, avremo

$$\int_{S_e}\Delta V\,dS = -\int_\sigma V\frac{\partial V_e}{\partial p}\,d\sigma - \int_\alpha V\frac{V}{\partial p}\,d\alpha - \int_s V\frac{\partial V}{\partial p}\,ds -$$

$$-\int_{S_e} V\Delta^2 V dS$$

e prendendo poi per S lo spazio interno S_i,

$$\int_{S_i}\Delta V\,dS = \int_\sigma V\frac{\partial V_i}{\partial p}\,d\sigma - \int_{S_i} V\Delta^2 V\,dS\ .$$

Sommando queste due equazioni, si ottiene

$$(17)\quad \int \Delta V\,dS = -\int_\sigma V\frac{\partial V_e}{\partial p}\,d\sigma + \int_\sigma V\frac{\partial V_i}{\partial p}\,d\sigma - \int_\alpha V\frac{\partial V}{\partial p}\,d\alpha -$$

$$-\int V\Delta^2 V\,dS - \int_s V\frac{\partial V}{\partial p}\,ds$$

dove l'integrale del primo membro è esteso a tutto lo spazio. Moltiplicando la equazione (17) per $\frac{1}{8\pi}$ e sottraendo dalla (16), si ha

$$P = \frac{1}{8\pi}\int_s V\frac{\partial V}{\partial p}\,ds + \frac{1}{8\pi}\int \Delta V\,dS$$

A cagione delle proprietà caratteristiche di V sopra la sfera di raggio infinito, sarà

$$\int_s V \frac{\partial V}{\partial \rho} ds = 0 \ .$$

Dunque

$$(18) \qquad P = \frac{1}{8\pi}\int \Delta V \, dS$$

dove l'integrale dev'essere esteso a tutto lo spazio.

Se il sistema A è composto di masse a tre dimensioni che occupano lo spazio S, e di masse a due dimensioni distribuite sopra una o più superficie σ, e il sistema A_1 è composto di masse a tre dimensioni che occupano lo spazio S_1 e di masse a due dimensioni distribuite sopra una o più superficie σ', avremo

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho$$

nello spazio S, e in tutto il rimanente spazio

$$\Delta^2 V = 0 \ ,$$

e sopra le superficie σ

$$\frac{\partial V_e}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p} = -4\pi\rho$$

onde

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma V' \frac{\partial V_e}{\partial p} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma V' \frac{\partial V_i}{\partial p} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int V' \Delta^2 V \, dS \ ,$$

dove l'ultimo integrale può estendersi a tutto lo spazio. Ponendo nell'equazione (1) del §. XI, $U = V'$, si ottiene con osservazioni analoghe alle precedenti

$$(19) \qquad Q = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V'}{\partial z}\right) dS$$

e l'integrale deve estendersi a tutto lo spazio.

Se un sistema A è composto di più masse $M_1, M_2, \ldots M_n$, e denotiamo con V_s la funzione potenziale della massa M_s e con V la funzione potenziale di tutto il sistema A, avremo

$$V = \Sigma_s V_s$$

e il potenziale del sistema A sopra sè stesso sarà

$$P = \frac{1}{8\pi} \int \Delta (\Sigma_s V_s)\, dS$$

Ma

$$\Delta(\Sigma_s V_s) = \Sigma_s \Delta V_s + 2\, \Sigma_{ss_{,}} \left(\frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial V_{s_{,}}}{\partial x} + \frac{\partial V_s}{\partial y} \frac{\partial V_{s_{,}}}{\partial y} + \frac{\partial V_s}{\partial z} \frac{\partial V_{s_{,}}}{\partial z} \right)$$

Onde sostituendo nella equazione precedente e ponendo

$$p_s = \frac{1}{8\pi} \int \Delta V_s\, dS$$

$$q_{ss_{,}} = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial V_s}{\partial x} \frac{\partial V_{s_{,}}}{\partial x} + \frac{\partial V_s}{\partial y} \frac{\partial V_{s_{,}}}{\partial y} + \frac{\partial V_s}{\partial z} \frac{\partial V_{s_{,}}}{\partial z} \right) dS$$

avremo

$$P = \Sigma_s\, p_s + \Sigma_{ss_{,}}\, q_{ss_{,}}$$

Dunque il potenziale di un sistema composto di più masse, è uguale alla somma dei potenziali sopra se stesse di tutte queste masse, e di tutti i potenziali reciproci di tutte le combinazioni delle masse due a due.

Se il sistema A si riduce a un punto solo m' di massa uguale alla unità, dalla equazione (10) si ricava che il potenziale del sistema A sopra m' è uguale al valore che ha in m' la funzione potenziale del sistema A. Dunque la funzione delle coordinate di un punto qualunque m' dello spazio, che abbiamo chiamato funzione potenziale di un sistema A, è anch' essa un potenziale, è il potenziale del sistema A sopra il punto m_1, in cui è concentrata una massa uguale alla unità.

Quando un sistema A fosse composto di due specie differenti di punti materiali, e i punti della stessa specie si respingessero reciprocamente, e quelli di specie differente reciprocamente si attraessero, e queste forze agissero secondo la legge di *Newton*; denotando con $m_1, m_2, \ldots m_n$ le masse dei punti della prima specie, e con $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\nu$ quelle dei punti della seconda specie, la funzione potenziale V del sistema sopra un punto m della prima specie sarebbe

$$V = -\Sigma_s \frac{m_s}{r_s} + \Sigma_s \frac{\mu_s}{r_s}$$

dove r_s è la distanza di m da m_s o μ_s. Ponendo

$$\mu_s = -m_{n+s}$$

avremo

$$V = -\Sigma_s \frac{m_s}{r_s}$$

Quindi riguardando le masse delle due specie di punti come quantità le une positive e le altre negative, la funzione potenziale avrà la stessa espressione che ha nel caso di punti di una sola specie che si attraggono tra loro, soltanto questa espressione dovrà essere presa negativamente. Quello che si è detto delle funzioni potenziali vale anche per i potenziali, che si esprimono per le funzioni potenziali mediante le equazioni (4) e (7). Quando le due materie riempiono un dato spazio con continuità, prenderemo positiva la densità della materia della prima specie e negativa quella della materia d lla seconda specie, ed avremo:

$$V = -\int \frac{\rho dS}{r}$$

Le proprietà caratteristiche della funzione potenziale seguitano tutte a sussistere, soltanto se la massa è a tre dimensioni, nello spazio occupato dalla medesima abbiamo

$$\Delta^2 V = 4\pi\rho\,,$$

e per la massa totale deve prendersi sempre la somma algebrica delle masse delle due specie, e se la massa è a due dimensioni, alla superficie sopra cui è distribuita abbiamo

$$\frac{\partial V_a}{\partial p} - \frac{\partial V_b}{\partial p} = 4\pi\rho\,.$$

Per i potenziali in questo caso l'equazioni (18) e (19) diverranno

$$P = -\frac{1}{2}\int \Delta V ds$$

$$Q = -\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V'}{\partial z}\right)ds$$

Come esempi molto semplici di potenziali, prendiamo il potenziale di un ellissoide omogeneo, e il potenziale di due sfere omogenee, l'una sull'altra.

Nel §. XIV, abbiamo trovato che la funzione potenziale V di un ellissoide omogeneo di densità uguale alla unità, nei punti occupati dalla massa è data dall' espressione

$$V = \pi abc\int_0^\infty\left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D}$$

essendo

$$D = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,.$$

Quindi denotando con S lo spazio occupato dall'ellissoide il potenziale P sarà dato dall'equazione

$$P = \frac{1}{2}\pi abc\int_0^\infty\left(\int_S dS - \int_S \frac{x^2 dS}{a^2+\lambda} - \int_S \frac{y^2 dS}{b^2+\lambda} - \int_S \frac{z^2 dS}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D}$$

Ora

$$\int_S dS = \frac{4}{3}\pi abc, \int_S x^2 dS = \frac{4}{15}\pi a^3 bc, \int_S y^2 dS = \frac{4}{15}\pi ab^3 c, \int_S z^2 dS = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

onde

$$P = \frac{2\pi^2 a^2 b^2 c^2}{15}\int_0^\infty \left(5 - \frac{a^2}{a^2+\lambda} - \frac{b^2}{b^2+\lambda} - \frac{c^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D}$$

Ma

$$5 - \frac{a^2}{a^2+\lambda} - \frac{b^2}{b^2+\lambda} - \frac{c^2}{c^2+\lambda} = 2 + \frac{\lambda}{a^2+\lambda} + \frac{\lambda}{b^2+\lambda} + \frac{\lambda}{c^2+\lambda} = 2 + \frac{2\lambda}{D}\frac{\partial D}{\partial \lambda}$$

quindi

$$P = \frac{4}{15}\pi^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}\left(1 + \frac{\lambda}{D}\frac{\partial D}{\partial \lambda}\right) = \frac{8}{15}\pi^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D}$$

Se M è la massa dell' ellissoide sarà

$$M = \frac{4}{3}\pi abc ,$$

e quindi

$$P = \frac{3}{10} M^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D} .$$

Ponendo $a=b=c=R$, se ne deduce per il potenziale di una sfera omogenea di raggio R

$$P = \frac{3}{5}\frac{M^2}{R} .$$

Siano date due sfere omogenee S ed S′ di densità uguale all'unità, le loro masse siano rispettivamente M ed M′ ed a sia la distanza dei loro centri. Nel §. III, abbiamo trovato per la funzione potenziale V di una sfera S nello spazio esterno

$$V = \frac{M}{r}$$

r essendo la distanza del centro della sfera S dal punto attratto; quindi il potenziale Q della sfera S sopra la sfera S', sarà:

$$Q = M \int_{S'} \frac{dS'}{r}$$

Ma $\int_{S'} \frac{dS'}{r}$ è il valore della funzione potenziale della sfera S' nel centro di S, onde

$$\int_{S'} \frac{dS'}{r} = \frac{M'}{a} .$$

Sostituendo questo valore nella espressione di Q, si ha

$$Q = \frac{MM'}{a} .$$

L'equazioni del moto dei punti del sistema A, saranno

$$(20) \qquad \begin{aligned} m_s \frac{d^2 x_s}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial x_s} , \\ m_s \frac{d^2 y_s}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial y_s} , \\ m_s \frac{d^2 z_s}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial z_s} ; \end{aligned}$$

onde moltiplicando rispettivamente per $\frac{dx_s}{dt}$, $\frac{dy_s}{dt}$, $\frac{dz_s}{dt}$, sommando, integrando tra t_0 e t e ponendo

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_s m_s \left(\frac{d x_s^2}{dt^2} + \frac{dy_s^2}{dt^2} + \frac{dz_s^2}{dt^2} \right)$$

si ottiene la equazione

$$(21) \qquad T - T_0 = P - P_0 ,$$

dove T_0 e P_0 denotano i valori rispettivi di T e di P al tempo t_0. La equazione (21) dà il noto teorema: l'aumento di forza viva nel passaggio del sistema da una configurazione ad un altra è uguale all'aumento del potenziale, è indipendente dalle configurazioni intermedie, dipende solo dalle configurazioni iniziale e finale.

Se in una configurazione il potenziale è un massimo o un minimo o più generalmente, se la variazione prima del potenziale è uguale a zero, la configurazione corrispondente è una configurazione di equilibrio.

Se in una data configurazione A il potenziale è un massimo, l'equilibrio è stabile. Infatti sia B una configurazione infinitamente poco differente dalla configurazione A, e il sistema sia nella configurazione B senza forza viva, cioè sia $T_0=0$, il moto dovrà accadere in modo che sia

$$(22) \qquad T = P - P_0$$

cioè P dovrà crescere e non mai divenire inferiore a P_0, poichè T non può essere mai negativo. Quindi il sistema conserverà sempre configurazioni infinitamente poco differenti dalla configurazione A.

Se poi il potenziale nella configurazione A è un minimo, l'equilibrio sarà instabile. Infatti, se B è una configurazione infinitamente poco differente da quella A, e in essa $T_0=0$, avremo la medesima equazione (22), ma il moto dovrà accadere in modo che P si mantenga sempre maggiore di P_0 e quindi anche del valore che il potenziale ha nella configurazione A, il sistema non torna mai nella configurazione di equilibrio A, e l'equilibrio è instabile.

Passiamo ora a considerare la stabilità del moto di un sistema A. Si dice che il moto è stabile quando continuato indefinitamente senza che mai si aggiungano forze esterne, nessuna delle distanze reciproche dei punti diviene mai nè zero nè infinito.

Dall' equazioni (20), rammentando il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, si ha

$$(23)\quad \Sigma_s m_s\left(x_s \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} + y_s \frac{d^2 y_s}{dt^2} + z_s \frac{d^2 z_s}{dt^2}\right) = \Sigma_s \left(x_s \frac{\partial P}{\partial x_s} + y_s \frac{\partial P}{\partial y_s} + z_s \frac{\partial P}{\partial z_s}\right) = -P.$$

Ponendo

$$T_0 - P_0 = h,$$

la equazione (21) può scriversi

$$(24)\qquad \Sigma_s m_s \left(\frac{dx_s^2}{dt^2} + \frac{dy_s^2}{dt^2} + \frac{dz_s^2}{dt^2}\right) = 2P + 2h\ .$$

Sommando l'equazioni (23) e (24), si ottiene

$$(19)\qquad \frac{1}{2} \Sigma_s m_s \frac{d^2 r_s^2}{dt^2} = P + 2h$$

dove

$$r_s^2 = x_s^2 + y_s^2 + z_s^2\ .$$

Osserviamo ora la identità

$$\Sigma_s m_{s_1} \Sigma_s m_s (x_s^2 + y_s^2 + z_s^2) - (\Sigma_s m_s x_s)^2 - (\Sigma_s y_s m_s)^2 - (\Sigma_s z_s m_s)^2 = \Sigma_{ss_1} m_s m_{s_1} r^2_{ss_1}$$

la quale ponendo

$$\Sigma_s m_s = M,$$

$$\Sigma_s m_s x_s = MX\ ,\ \Sigma_s m_s y_s = MY\ ,\ \Sigma_s m_s z_s = MZ\ ,$$

può scriversi

$$\Sigma_s m_s r^2_s = M(X^2 + Y^2 + ^2) + \frac{1}{M} \Sigma_{ss_1} m_s m_{s_1} r^2_{ss_1}\ .$$

Ora X, Y, Z sono le coordinate del centro di gravità del sistema, onde

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0\ ,\ \frac{d^2Y}{dt^2} = 0\ ,\ \frac{d^2Z}{dt^2} = 0$$

e abbiamo

$$\frac{1}{2}\Sigma_s m_s \frac{d^2 r_s^2}{dt^2} = \mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{X}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Y}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Z}^2}{dt^2}\right) + \frac{1}{2\mathrm{M}}\frac{d^2}{dt^2}\Sigma_{ss_1} m_s m_{s_1} r_{ss_1}^2$$

e quindi ponendo:

$$\Phi = \frac{1}{2\mathrm{M}}\Sigma_{ss_1} m_s m_{s_1} r_{ss_1}^2$$

la equazione (25) diviene

$$(26)\qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2} = \mathrm{P} + 2h - \mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{X}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Y}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Z}^2}{dt^2}\right)$$

Analogamente si trasforma la equazione (24), e si ottiene

$$(27)\qquad \frac{1}{2\mathrm{M}}\Sigma m_s m_{s_1} v^2_{ss_1} = \mathrm{P} + h - \frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{d\mathrm{X}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Y}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Z}^2}{dt^2}\right)$$

dove

$$v^2_{ss_1} = \left(\frac{dx_s}{dt^2} - \frac{dx_{s_1}}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy_{s_1}}{dt^2} - \frac{dy_s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dz_s}{dt^2} - \frac{dz_{s_1}}{dt^2}\right)^2.$$

Ora conservandosi costante sempre l'ultimo termine delle equazioni (26) e (27) per il principio della conservazione del moto centro di gravità, sarà costante anche

$$\mathrm{H} = h - \frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{d\mathrm{X}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Y}^2}{dt^2} + \frac{d\mathrm{Z}^2}{dt^2}\right)$$

e l'equazioni (26) e (27) divengono

$$(28)\qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2} = \mathrm{P} + 2\mathrm{H}$$

$$(29)\qquad \mathrm{T} = \mathrm{P} + \mathrm{H}$$

denotando con T la forza viva relativa $\frac{1}{2\mathrm{M}}\Sigma_{ss} m_s m_{s_1} v_{ss_1}$, cioè la forza viva totale del sistema diminuita della forza viva del centro di gravità. La equazione (28) è dovuta a *Iacobi.*

Affinchè il moto del sistema sia stabile è necessario che non divengano mai infinite nè Φ nè P. Ora se avessimo sempre

$$P + 2H > k \tag{30}$$

essendo k una quantità positiva, comunque piccola ma finita, sarebbe

$$\Phi > kt^2 + \alpha t + \beta$$

e quindi dopo un tempo sufficientemente grande Φ diverrebbe più grande di una quantità qualunque data, e il moto non sarebbe stabile. Ma se H fosse positivo poichè P è necessariamente positivo (se non si hanno altro che forse attrattive) sarebbe verificata certamente l'ineguaglianza (30). Anche se H fosse zero, a meno che P non convergesse a zero il che è incompatibile pure colla stabilità del moto del sistema. Dunque H dev' essere negativo.

Non si potrà avere sempre neppure

$$P + 2H < -k$$

essendo k un numero positivo e finito, perchè altrimenti Φ decrescerebbe oltre ogni limite, il che è impossibile. Dunque o $P + 2H$ convergerà a zero in modo da differirne meno di qualunque quantità data dopo un tempo sufficientemente grande, e $P = -2H$ sarà il potenziale della configurazione verso la quale il sistema converge, e la forza viva corrispondente sarà uguale a $-H$, cioè alla metà del potenziale; oppure $P + 2H$ passerà infinite volte per zero, quindi P avrà dei valori massimi per i quali

$$P + 2H > 0$$

dei minimi per i quali

$$P + 2H < 0$$

Sia t_1 il tempo in cui ha luogo uno dei minimi e t_2 il tempo in cui ha il luogo il massimo successivo e P_0 il potenziale corrispondente alle configurazioni nelle quali $P + 2H = 0$. Integriamo l' equazione (28) tra questi due limiti per i quali $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, e avremo

$$\int_{t_1}^{t_2} P\, dt = -2H(t_2 - t_1) = P_0(t_2 - t_1),$$

ossia

$$(31) \qquad P_0 = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

Integrando tra i medesimi limiti la equazione (29) avremo

$$(32) \qquad \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t^2} T\, dt = \frac{1}{2} P_0 \,.$$

Dall' equazioni (31) e (22) si deduce il teorema:

In ogni moto stabile di un sistema di punti che si attraggono secondo la legge di *Newton*, la forza viva relativa media si conserva sempre costante ed uguale alla metà del potenziale medio.

§. XXI.

Massimi e minimi delle funzioni potenziali.

Sia V la funzione potenziale di un sistema A di masse comunque distribuite nello spazio. Descriviamo una sfera σ col centro in un punto qualunque a e con un raggio R, e denotiamo con M_0 la somma delle masse del sistema A contenute nello spazio S racchiuso dalla sfera σ, e con M la somma delle masse situate nello spazio S' esterno alla sfera. Imaginiamo distribuita sopra σ una massa a due dimensioni colla densità uguale alla unità. La funzione potenziale di questa massa, come abbiamo dimostrato nel §. IV, sarà

$$W_i = 4\pi R$$

nello spazio S, e

$$W_e = \frac{4\pi R^2}{r}$$

nello spazio S'. Ponendo nella equazione (11) del paragrafo precedente

$$\rho' = 1 \, , V' = W$$

avremo

$$\int_\sigma V \, d\sigma = 4\pi \, R \, M_0 + 4\pi R^2 \int \frac{\rho ds}{r} \, , \tag{1}$$

dove l'ultimo integrale dev' estendersi a tutto lo spazio occupato dalle masse M, ed r è la distanza dei punti di questo spazio dal punto a, e quindi, denotando con V_a il valore di V nel punto a, sarà

$$\int \frac{\rho dS}{r} = V_a \, .$$

Sostituendo questo valore nella equazione (1) si ottiene

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_\sigma V d\sigma = V_a + \frac{M_0}{R} \, . \tag{2}$$

Poichè

$$\int_\sigma d\sigma = 4\pi \, R^2 \, ,$$

il primo membro della equazione (2) esprime la media aritmetica dei valori che la funzione V prende sopra la sfera σ, ed abbiamo il seguente teorema dovuto a *Gauss*

1.° La media aritmetica dei valori che prende sopra una sfera qualunque σ, la funzione potenziale di un sistema di masse, è uguale al valore di questa funzione nel centro di σ, aumentato della somma delle masse del sistema che si trovano nello spazio racchiuso da σ, divisa per il raggio della sfera.

Se nello spazio racchiuso da σ non si trovano masse del sistema, sarà

$$M_0 = 0$$

e quindi

$$V_a = \frac{\int V d\sigma}{\int d\sigma} \tag{3}$$

e il valore di V nel centro di σ sarà uguale alla media aritmetica dei valori di V alla superficie.

Se V è la funzione potenziale di un sistema di masse di due specie, se cioè le densità sono ora positive ora negative, come abbiamo spiegato nel paragrafo precedente, e se la somma delle masse positive è uguale alla somma delle masse negative; descrivendo una sfera σ che racchiuda tutto il sistema, avremo nella equazione (1)

$$M_0 = 0 ,$$

e non essendovi masse nello spazio esterno alla sfera, anche

$$\rho = 0$$

quindi

$$\int_\sigma V d\sigma = 0 \tag{4}$$

ed abbiamo il teorema

2.° La media aritmetica dei valori che la funzione potenziale di un sistema di masse positive e negative, la somma algebrica delle quali sia zero, prende sopra una sfera che racchiude tutte le masse nel suo interno, è uguale a zero.

Ricerchiamo ora se è possibile che una funzione potenziale V, nell' intorno di un punto m di uno spazio connesso S che non contiene masse, sia uguale a una costante A, senza essere però costante in tutto lo spazio S.

Conduciamo per il punto m una retta contenuta tutta nello spazio S, prolungata fino a un punto m' tale che V non sia uguale ad A in tutto l' intervallo, compreso tra m ed m'. Se questo è possibile, per un teorema dimostrato dal prof. *Dini* [1], essendo V una funzione continua, esisterà tra m ed m' un punto determinato μ dotato della proprietà che mentre tra m e μ (μ incluso) si ha sempre $V = A$, in qualunque intervallo compreso tra μ e un altro punto del tratto $\mu m'$, esisteranno sempre dei punti per i quali V non è eguale ad A.

Prendiamo ora sopra il tratto $m\mu$ un punto e, alla distanza h da μ, e sopra $\mu m'$ un punto e' distante anch' esso di h da μ, ed h sia minore della minima distanza dei punti di ee' dal punto più vicino occupato da massa.

La derivata n^{esima} di V presa nella direzione della retta mm', in un punto qualunque del tratto ee' sarà [2]:

$$\frac{\partial^n V}{\partial h^n} = \int \rho \frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial h^n} dS = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, n(-1)^n \int \rho \frac{P_n dS}{r^{n+1}}$$

dove P_n è la funzione di *Legendre* dell' ordine n, ed r la distanza del punto di ee' cui si riferisce il valore della derivata, dai punti occupati da masse. Ora il massimo valore assoluto di P_n è la unità, quindi se denotiamo con R il minimo valore di r, che abbiamo supposto maggiore di h, con ρ_0 il massimo valore di ρ, con σ_0 lo spazio totale occupato da massa, avremo in valore assoluto

$$\int \frac{\rho P_n dS}{r^{n+1}} < \frac{\rho_0 \sigma_0}{R^{n+1}}$$

(1) Dini. Fondamenti per la teorica delle funzioni di una variabile reale, pag. 53.
(2) *Maxwell*. Electricity and Magnetisem. Vol. I. pag. 163.

e quindi in valore assoluto per ogni punto del tratto ee'

$$\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n}\,\frac{\partial^n V}{\partial h_n} < \frac{\rho_0 \sigma_0}{R}\left(\frac{h}{R}\right)^n$$

ed essendo $h < R$, avremo

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n}\,\frac{\partial^n V}{\partial h^n} = 0\,.$$

Questa condizione come è noto, è sufficiente perchè si possa esprimere V per mezzo della serie di *Taylor:*

$$V = \sum_0^\infty \frac{h^n}{1\,2\,..\,n}\left(\frac{\partial^n V}{\partial h^n}\right)_\mu$$

in tutto il tratto ee'. Ora da μ ad e la funzione V è costante; quindi per qualunque valore di n,

$$\left(\frac{\partial^n V}{\partial h^n}\right)_\mu = 0\,.$$

La funzione V sarà dunque costante ed uguale ad A anche nel tratto $\mu e'$, contro il supposto. Quindi una funzione potenziale V non può essere costante nell'intorno di un punto m dello spazio connesso S non occupato da masse, senza essere costante in tutto S, ed abbiamo il teorema:

3.° Una funzione potenziale V non può essere costante in una porzione s di uno spazio connesso S che non contiene masse, senza esserlo anche in tutto S.

Poichè la funzione V in tutto lo spazio connesso S non occupato da masse ha determinate e finite tutte le sue derivate e se non è costante in tutto lo spazio S non ha in alcun punto tutte le sue derivate uguali a zero, non potrà avere nell'intorno di alcun punto di S, un numero infinito di massimi e di minimi (1).

Una funzione potenziale V di un sistema qualunque di masse (eccettuando le masse a una sola dimensione) si conserva finita e continua in tutto lo spazio, quindi avrà almeno un massimo

(1) Dini. Fondamenti per la teoria delle funzioni di una variabile reale. pag. 229.

e un minimo. Determiniamo la posizione dei punti dove possono trovarsi questi massimi e questi minimi.

Supponiamo che in un punto a situato a distanza finita dalle masse si trovi un massimo o un minimo. Descriviamo una sfera σ col centro in a e con un raggio R minore della minima tra le distanze di a dai punti occupati dalle masse. Nella sfera σ non saranno contenute masse e per il teorema 1.° avremo

$$(5) \qquad \int_\sigma (V - V_a)\, d\sigma = 0 \; .$$

Poiche per il teorema 3.° V non può essere uguale a V_a sopra tutte le sfere che possono descriversi con raggio uguale ad R o minore di R, affinchè questa equazione sia sodisfatta dovrà $V - V_a$ mutar segno in σ; ma non potendo avere V nell'intorno del punto a un numero infinito di massimi e di massimi, se V_a è un massimo sarà $V - V_a < 0$ sopra tutta una sfera di raggio R sufficientemente piccolo e se è un minimo: $V - V_a > 0$. Dunque la equazione (5) non può essere sodisfatta, ed abbiamo il teorema.

4.° Nei punti che si trovano a distanza finita dalle masse, la funzione potenziale non può avere ne massimi, nè minimi.

Pertanto i massimi e i minimi, e quindi anche il più grande dei massimi, e il più piccolo dei minimi, che si dicono i valori *estremi* della funzione potenziale, non possono essere altro che all'infinito e nello spazio occupato dalle masse.

Consideriamo prima le funzioni potenziali di masse tutte positive. I valori di queste funzioni sono tutti positivi. Dunque il valore zero che la funzione potenziale ha all'infinito è un minimo, ed il più piccolo dei minimi. I massimi e il più grande tra essi non potranno trovarsi altro che in punti occupati dalle masse. Abbiamo dunque il teorema:

5.° La funzione potenziale di masse tutte positive ha un valore estremo (il minimo) all'infinito, e l'altro (il massimo) in un punto occupato dalle masse.

Consideriamo ora la funzione potenziale V di un sistema di masse positive e negative, la somma algebrica delle quali sia uguale a zero. Descrivendo una sfera σ che le racchiuda tutte nel suo interno, per il teorema 2.°, avremo

$$\int_{\sigma} V d\sigma = 0\,,$$

e questa equazione non potrebbe essere sodisfatta se V fosse sempre positivo o sempre negativo. Dunque V deve avere nelle diverse parti dello spazio esterno alle masse, valori positivi e negativi, e quindi il valore zero che prende all'infinito non è più un valore estremo di V; e ambedue i valori estremi dovranno trovarsi nei punti occupati dalle masse. Abbiamo quindi il teorema.

6.° I valori estremi della funzione potenziale di un sistema di masse, la somma algebrica delle quali è uguale a zero, sono uno positivo, l'altro negativo e si trovano ambedue in punti occupati dalle masse.

7.° Se V è una funzione di masse distribuite sopra una superficie, la somma algebrica delle quali sia uguale a zero, non potrà avere sopra la superficie stessa un valore costante e differente da zero. Poichè a questa costante dovrebbero essere uguali i due valori estremi di V, uno positivo e l'altro negativo, il che è impossibile.

8.° Se una massa positiva è distribuita sopra una superficie in modo che la sua funzione potenziale sia uguale a una costante positiva A sopra tutta la superficie, questa massa non potrà lasciare scoperta nessuna porzione di superficie.

Infatti, se in un punto della superficie non vi fosse massa, questo sarebbe un punto esterno, e in esso la funzione potenziale avrebbe un massimo, il che per il teorema 4.° è impossibile.

9.° Se è possibile distribuire masse positive e negative, la somma algebrica delle quali sia zero, sopra una superficie, in modo che la sua funzione potenziale sommata con un'altra funzione U sia uguale a una costante A sopra tutta la superficie, il valore di A sarà compreso tra il massimo e il minimo dei valori che U prende sopra la superficie.

Infatti, denotando con U_1 il valore massimo, e con U_0 il valore minimo che U prende sopra la superficie, $A - U_0$ sarà il più grande ed $A - U_1$ il più piccolo valore che V prende sopra la superficie, e per il teorema 6.°, il primo dev'essere positivo il secondo negativo. Abbiamo dunque

$$U_1 > A > U_0 .$$

10.° Se due funzioni potenziali V e V' hanno valori uguali in ciascun punto di una o più superficie σ che formano il contorno di uno spazio connesso S che non contiene masse, saranno identiche in tutto lo spazio.

Infatti, ponendo

$$W = V - V' \quad ,$$

la funzione potenziale W avrà il valore zero sopra tutte le superficie σ, e se non fosse zero in tutto lo spazio S, dovrebbe esservi in S almeno un massimo o un minimo, il che per il teorema 4.°, è impossibile. Dunque $W = 0$, e quindi

$$V = V'$$

in tutto lo spazio S.

§. XXII.

Sistemi di masse che hanno un potenziale finito.

Consideriamo le discontinuità delle funzioni potenziali che possono presentarsi in punti separati o lungo linee separate. Sia un punto m in cui la funzione potenziale V di un sistema di masse positive e negative diviene discontinua in modo che i limiti verso i quali convergono

$$r^{1+\frac{\mu}{2}} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad r^{1+\frac{\mu}{2}} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad r^{1+\frac{\mu}{2}} \frac{\partial V}{\partial z}$$

col diminuire di r siano differenti da zero, essendo μ uguale o maggiore dell'unità positiva, ed r la distanza da m del punto variabile.

Descriviamo col centro in m due sfere, una di raggio r', l'altra altra di raggio $R>r'$. La parte p dell' integrale

$$P = -\frac{1}{8\pi}\int \Delta V dS ,$$

che si riferisce alla porzione di spazio compresa tra le due sfere, sarà

$$p = -\frac{1}{8\pi}\int_{\omega}\int_{r'}^{R} \Delta V r^2 dr d\omega ,$$

essendo ω la sfera di raggio uguale alla unità. Prendendo R sufficientemente piccolo, avremo in tutto lo spazio compreso tra le due sfere

$$r^{2-\mu}\, \Delta V > a ,$$

essendo a una quantità finita e positiva. Onde

$$\int_{\omega} d\omega \int_{r'}^{R} \Delta V\, r^2\, dr\, d\omega > 4\pi a \int_{r'}^{R} \frac{dr}{r^{\mu}}$$

Ora è se $\mu>1$

$$\int_{r'}^{R} \frac{dr}{r^{\mu}} = \frac{1}{\mu-1}\left(\frac{1}{r'^{\mu-1}} - \frac{1}{R^{\mu-1}}\right)$$

che col diminuire di r' diviene maggiore di qualunque quantità data. Se $\mu=1$

$$\int_{r'}^{R} \frac{dr}{r} = \log R - \log r'$$

che col diminuire di r' cresce pure oltre ogni limite.

Dunque affinchè l'integrale P abbia un valore finito è necessario che per ogni punto dello spazio i limiti verso i quali convergono

$$r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial V}{\partial x},\ r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial V}{\partial y},\ r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

siano uguali a zero.

Esaminiamo ora una linea s aperta o chiusa, lungo la quale V sia discontinua in modo che i limiti verso i quali convergono i prodotti

$$t\frac{\partial V}{\partial x},\ t\frac{\partial V}{\partial y},\ t\frac{\partial V}{\partial z}$$

siano differenti da zero, essendo t la lunghezza della normale alla linea s compresa tra la linea stessa e il punto variabile.

Prendiamo il sistema triplo di superficie ortogonali: le superficie inviluppo delle sfere di raggio t, con i centri sulla linea S; i piani normali alla linea s che saranno determinati dalla lunghezza s dell'arco della linea s, contata da un punto fisso al punto a cui è condotto il piano normale, e finalmente le superficie luogo delle normali t che fanno uno stesso angolo θ con una retta fissa nel piano normale. Le equazioni che determinano le coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3 di un punto qualunque in funzione delle nuove coordinate s, t, θ, saranno

$$x_1 = \xi_1 + tX_1\ ,\ x_2 = \xi_2 + tX_2\ ,\ x_3 = \xi_3 + tX_3$$

dove ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono le coordinate del punto di s per cui passa il piano normale ad s condotto per il punto (x_1, x_2, x_3), e quindi sono funzioni soltanto di s; e le X_1, X_2, X_3, denotano i coseni degli angoli che la normale t fa cogli assi, e quindi sono funzioni di s e di θ soltanto. Onde avremo

$$\Sigma_a \frac{\partial x_a{}^2}{\partial s^2} = 1 + 2t\,\Sigma\frac{\partial x_a}{\partial s}\frac{\partial X_a}{\partial s} + t^2\,\Sigma\frac{\partial X_a{}^2}{\partial s^2} = H_1{}^2$$

$$\Sigma_a \frac{\partial x_a{}^2}{\partial \theta^2} = t^2\,\Sigma\frac{\partial X_a{}^2}{\partial \theta^2} = H_2{}^2$$

$$\Sigma_a \frac{\partial x_a{}^2}{\partial t^2} = 1 = H_3{}^2$$

Ora, essendo t normale alla tangente alla linea s, abbiamo

$$\Sigma_a X_a \frac{\partial \xi_a}{\partial s} = 0 \,,$$

e quindi derivando nuovamente

$$\Sigma_a \frac{\partial X_a}{\partial s} \frac{\partial \xi_a}{\partial s} = - \Sigma_a X_a \frac{\partial^2 \xi_a}{\partial s^2} = \pm \frac{\cos(\rho t)}{\rho} \,,$$

essendo ρ il raggio di curvatura della linea s.

Ma le linee $s = \text{cost.}$, $\theta = \text{cost.}$ sopra la superficie tubulare t, sono linee di curvatura, quindi sono parallele alle loro corrispondenti sferiche ottenute col metodo di *Gauss*, e perciò le tangenti alla linea $\theta = costante$, sono parallele alle tangenti alla linea s, e abbiamo

$$\sqrt{\Sigma_a \frac{\partial X_a^2}{\partial s^2}} = \pm \Sigma_a \frac{\partial \xi_a}{\partial s} \frac{\partial X_a}{\partial s} = \pm \frac{\cos(\rho t)}{\rho} \,.$$

Essendo inoltre geodetiche sopra la sfera le linee $s = \text{cost}$, avremo

$$\Sigma_a \frac{\partial X_a^2}{\partial \theta^2} = 1 \,,$$

e quindi

$$H_1^2 = \left(1 \pm \frac{t \cos(\rho t)}{\rho}\right)^2 ,$$

$$H_2^2 = t^2 \,,$$

$$H_3 = 1 \,.$$

Ora per quello che abbiamo dimostrato nel §. II, sarà

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial x_3}{\partial t} = H_1 H_2 H_3 = t\left(1 \pm \frac{t \cos(\rho t)}{\rho}\right),$$

e quindi

$$P = - \frac{1}{8\pi} \int \Delta V ds = - \frac{1}{8\pi} \int\int\int \Delta V \left(1 \pm \frac{t \cos(\rho t)}{\rho}\right) t dt ds d\theta \,.$$

Prendiamo la parte p di questo integrale che si riferisce alla porzione di spazio compresa tra due superficie tubulari $t=t'$ e $t=\tau$, e due piani normali $s=0$, $s=s'$. Avremo

$$p=-\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{s'}ds\int_{t'}^{\tau}\Delta V(1-ht)tdt\,,$$

dove

$$h=\mp\frac{\cos(\rho t)}{\rho}$$

Prendendo τ sufficientemente piccolo, in tutto questo spazio, sarà

$$t^2\Delta V>a\ ,$$

essendo a una quantità finita e positiva. Quindi

$$\int_{t'}^{\tau}\Delta V\,(1-ht)\,t\,dt>a\int_{t'}^{\tau}\left(\frac{1}{t}-h\right)dt>a\left(\log\tau-\log t'+h(t'-\tau)\right)$$

che col diminuire di t' cresce oltre ogni limite.

Dunque affinchè l'integrale P abbia un valore finito è necessario che non vi siano nello spazio linee separate, lungo le quali i limiti verso cui convergono

$$t\frac{\partial V}{\partial x}\,,\ t\frac{\partial V}{\partial y}\,,\ t\frac{\partial V}{\partial z}$$

siano differenti da zero.

Sia ora V una funzione potenziale di masse positive e negative, situate tutte a distanza finita, e l'integrale P abbia un valore finito. La funzione V in tutto lo spazio non occupato dalle masse, si conserverà finita e continua insieme colle sue derivate, e sodisfarà alla equazione

$$\Delta^2V=0\ .$$

Le masse occuperanno spazi a tre, a due, o a una dimensione, o si troveranno in punti separati. Denotando con S, σ, s rispettivamente questi spazi, e con m i punti occupati da massa, avremo negli spazi S

$$\Delta^2 V = 4\pi\rho ,$$

e del resto V e le sue derivate prime vi si conserveranno finite e continue. Attraverso le superficie σ, V si conserverà finita e continua e le derivate prime avranno la discontinuità espressa dalla equazione

$$\frac{\partial V_e}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p} = 4\pi\rho .$$

Le discontinuità che V avrà lungo le linee s, dovendo essere finito il valore di P, saranno tali che denotando con t la lunghezza della normale ad s, compresa tra il punto della curva e il punto variabile, si abbia

$$(1) \qquad \lim_{t=0} t\frac{\partial V}{\partial x} = 0 , \lim_{t=0} t\frac{\partial V}{\partial y} = 0 , \lim_{t=0} t\frac{\partial V}{\partial z} = 0 .$$

Nei punti m per la stessa ragione dovremo avere

$$(2) \qquad \lim_{r=0} r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial V}{\partial x} = 0 , \lim_{r=0} r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial V}{\partial y} = 0 , \lim_{r=0} r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial V}{\partial z} = 0 ,$$

denotando r la distanza da m del punto variabile.

Consideriamo ora lo spazio connesso S_e limitato da una sfera di raggio infinito, dalle superficie chiuse σ e dalle superficie chiuse α descritte come abbiamo detto nel paragrafo precedente, infinitamente vicine a ciascuna delle superficie aperte σ'; dalle superficie tubulari γ inviluppo delle sfere di raggio t col centro sopra ciascuna delle s, che potremo chiudere con due mezze sfere di raggio t se la linea s è aperta; e finalmente da sfere μ di raggio δ descritte intorno a ciascun punto m come centro.

Per determinare il valore di V in un punto m' dello spazio S_e, essendo verificate in S_e le condizioni richieste dal teorema di *Green*, potremo applicare la formula (8) del §. XI, ed osservando che è uguale a zero l' integrale relativo alla sfera di raggio infinito, avremo

$$(3)\quad V' = -\frac{1}{4\pi}\Sigma\int_\sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_e}{\partial p_e} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\sigma - \frac{1}{4\pi}\Sigma\int_\alpha\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p_e} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\alpha$$

$$-\frac{1}{4\pi}\Sigma\int_\gamma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_e}{\partial p_e} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\gamma - \frac{1}{4\pi}\Sigma\int_\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p_e} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\mu - \frac{1}{4\pi}\int_{S_e}\frac{\Delta^2 V}{r}\,dS\,.$$

Ora nello spazio S_i interno a una superficie σ, essendo il punto m' esterno a questo spazio, abbiamo V ed $\frac{1}{r}$ finite e continue insieme colle loro derivate prime, e

$$\Delta^2\frac{1}{r} = 0\,,$$

quindi può applicarsi la formula (3) del §. XI, e si ha

$$(4)\qquad \int_\sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_i}{\partial p_i} - V_i\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_i}\right)d\sigma = -\int_{S_i}\frac{\Delta^2 V}{r}\,dS$$

Abbiamo inoltre

$$(5)\quad \int_\sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_e}{\partial p_e} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\sigma - \int_\sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_i}{\partial p_e} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\sigma - 4\pi\int_\sigma\frac{\rho d\sigma}{r} = 0\,.$$

Sottraendo l'equazione (4) dalla (5), ed osservando che la derivata rapporto alla normale p_e diretta verso l' interno di S_e è uguale e di segno contrario alla derivata rapporto alla normale p_i diretta verso l'interno dello spazio S_i, si ottiene

$$(6)\qquad \int_\sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_e}{\partial p_e} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\sigma = 4\pi\int_\sigma\frac{\rho ds}{r} + 4\pi\int_{S_i}\frac{\rho dS}{r}\,.$$

Sopra la superficie α nei punti che si trovano sopra la stessa normale alla superficie aperta σ', intorno a cui α è descritta, i valori di $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_e}$ sono uguali e di segno contrario, uguali i valori di V, e la somma delle derivate $\frac{\partial V}{\partial p_e}$ è uguale a $4\pi\rho$. Quindi avremo

$$(7) \qquad \int_\alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_e}{\partial p_e} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_e} \right) d\alpha = 4\pi \int_{\sigma'} \frac{\rho d\sigma'}{r} .$$

Sostituendo nella equazione (3) i valori dati dall'equazioni (6) e (7), ed osservando che gli spazi occupati da masse a tre dimensioni che si trovano in S_e più tutti gli spazi occupati da masse a tre dimensioni che si trovano negli spazi S_i formano tutto lo spazio S occupato da masse a tre dimensioni, otterremo

$$(8) \quad V' = -\Sigma \int_\sigma \frac{\rho\, d\sigma}{r} - \Sigma \int_{\sigma'} \frac{\rho dS}{r'} - \Sigma \int_S \frac{\rho dS}{r} - \frac{1}{4\pi} \Sigma \int_\tau \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_e}{\partial p_e} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_e} \right)$$
$$- \frac{1}{4\pi} \Sigma \int_\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_e}{\partial p_e} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_e} \right) d\mu .$$

Se prendiamo per coordinate i parametri s, θ e t del sistema triplo di superficie ortogonali, del quale fa parte la superficie tubulare γ, l'elemento lineare sopra questa superficie, sarà

$$ds^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2 d\theta^2 = (1 - ht)^2 ds^2 + t^2 d\theta^2 ,$$

dove h è il coseno dell'angolo che il raggio di curvatura di s fa con t, diviso per il raggio di curvatura di s. Quindi l'elemento $d\gamma$ della superficie tubulare sarà

$$d\gamma = t(1 - ht) ds d\theta .$$

Avremo dunque

$$(9)\quad \int_\gamma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p_e}\right)d\gamma=\int_0^{2\pi}\int_0^l\left(\frac{1}{r}\,t\frac{\partial V}{\partial t}-tV\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial t}\right)(1-ht)\,ds\,d\theta$$

$$+\int_{\frac{\omega}{2}}\left(\frac{t^2}{r}\frac{\partial V_1}{\partial p}-t^2V_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}\right)d\omega+\int_{\frac{\omega}{2}}\left(\frac{t^2}{r}\frac{\partial V_2}{\partial p}-t^2V_2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}\right)d\omega$$

denotando con V_1 i valori di V sopra una, con V_2 quelli sopra l'altra delle due semisfere che chiudono la superficie tubulare, essendo ω la sfera di raggio uguale alla unità, ed l la lunghezza totale della linea s. I due ultimi integrali mancherebbero se la linea s fosse chiusa.

Ora a cagione dell' equazioni (1), si ha

$$(10)\qquad \lim_{t=0} t\frac{\partial V}{\partial t}=0\ ,$$

e poichè se V è una funzione di una variabile t che a partire da un finito valore di t, fino a uno piccolo quanto si vuole maggiore di zero, non diviene mai nè indeterminata, nè infinita nè discontinua, la equazione (10) trae per necessaria conseguenza [1]

$$\lim_{t=0}\frac{V}{\log t}=0\ ,$$

avremo anche

$$\lim_{t=0} tV=\lim_{t=0} t\log t\,.\,\frac{V}{\log t}=0\ ,$$

quindi tutti gl' integrali che compariscono nel secondo membro della equazione (9) convergono a zero col diminuire di t.

Se prendiamo le coordinate polari col polo nel centro m della sfera μ, avremo

$$(11)\qquad \int_\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}\right)d\mu=\int_\omega\left(\frac{\delta^2}{r}\frac{\partial V}{\partial\delta}-\delta^2V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\delta}\right)d\omega$$

(1) Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di una variabile reale pag. 79.

Ora a cagione dell'equazioni (2), abbiamo

$$(12)\qquad \lim_{\delta=0} \delta^{\frac{3}{2}} \frac{\partial V}{\partial \delta} = 0 .$$

Ma se V è una funzione di δ che insieme colla sua derivata prima, a partire da un valore finito di δ fino a uno piccolo quanto si vuole, maggiore di zero, non è nè indeterminata nè infinita, nè discontinua, ed è verificata la condizione (12) sarà anche

$$\lim_{\delta=0} \delta^{\frac{1}{2}} V = 0 ;$$

e quindi

$$\lim_{\delta=0} \delta^{2} \frac{\partial V}{\partial \delta} = 0 , \quad \lim_{\delta=0} \delta^{2} V = 0 ,$$

e l' integrale del secondo membro della equazione (11), col diminuire di δ converge a zero. Dunque la equazione (8) diviene

$$V' = -\Sigma \int_{\sigma} \frac{\rho d\sigma}{r} - \Sigma \int_{\sigma'} \frac{\rho d\sigma'}{r} - \Sigma \int_{S} \frac{\rho dS}{r}$$

cioè, quando sono verificate l'equazioni (1) e (2), V è funzione potenziale di masse a due e a tre dimensioni soltanto. Quindi V potrà essere funzione di masse distribuite sopra linee separate, o concentrate in punti separati, solamente quando lungo queste linee, e per questi punti non sono verificate rispettivamente l'equazioni (1) e (2), e che in conseguenza per i teoremi dimostrati al principio di questo paragrafo, il valore di P è infinito.

§. XXIII.

Linee di Forza.

Dato un sistema qualunque di masse che agiscono secondo la legge di Newton, e che quindi hanno una funzione potenziale V, chiameremo con Faraday *Linea di Forza* una linea che ha in ogni suo punto la tangente nella direzione della risultante delle forze che agiscono sul medesimo punto.

Esprimendo analiticamente la proprietà che definisce le linee di forza, e denotando con x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane dei punti e con s l'arco della linea, abbiamo le equazioni

$$(1)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\,;\quad \frac{\partial x_2}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\,;\quad \frac{\partial x_3}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\,,$$

e quindi le linee di forza intersecano ortogonalmente le superficie di livello.

L'equazioni (1) possono anche scriversi sotto la forma

$$(2)\qquad dx_1 : dx_2 : dx_3 = \frac{\partial V}{\partial x_1} : \frac{\partial V}{\partial x_2} : \frac{\partial V}{\partial x_3}\,,$$

e le due equazioni integrali delle (2) conterranno due costanti arbitrarie e daranno il sistema doppiamente infinito delle linee di forza.

Il luogo geometrico delle linee di forza che passano per i punti di una linea qualunque s, è una superficie σ che ha in ogni suo punto uguale a zero la componente delle forze nella direzione della normale, cioè se p denota la normale alla superficie σ, in ogni suo punto sarà

$$(3)\qquad \frac{\partial V}{\partial p}=0\,.$$

Se la linea s è una linea chiusa, la superficie σ sarà tubulare, e con *Maxwell* la chiameremo un *Solenoide*. In tutti i punti di un solenoide sarà sodisfatta la (3).

Consideriamo ora lo spazio connesso S racchiuso da un solenoide σ, e da due superficie σ_1 e σ_2 che intersecano il solenoide secondo le linee chiuse s_1 e s_2. Supponiamo che in S siano contenute masse a tre dimensioni, la cui somma denoteremo con M, e masse a due dimensioni distese sopra una superficie γ, la cui somma denoteremo con m. Per il teorema espresso dalla equazione (17) del §. XI, avremo

$$\int_{\sigma}\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma+\int_{\sigma_1}\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma_1+\int_{\sigma_2}\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma_2+\int_{\gamma}\frac{\partial V_e}{\partial p}d\gamma-\int_{\gamma}\frac{\partial V_i}{\partial p}\partial\gamma=-\int_{S}\Delta^2 V dS\,.$$

Ponendo mente alla equazione (3) verificata sopra la superficie σ, alla discontinuità che le derivate di V hanno nell'attraversare la superficie γ, e al valore che il parametro differenziale di secondo ordine di V ha nello spazio S occupato dalla massa M, se prendiamo le normali p a σ_1 dirette verso l' interno di S, e quelle a σ_2 dirette verso l'esterno di S, avremo

$$\int_{\sigma_1}\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma_1=\int_{\sigma_2}\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma_2+4\pi(M+m)\,. \tag{4}$$

Se in S non vi sono masse, sarà

$$M=0\,,\; m=0\,,$$

e quindi

$$\int_{\sigma_1}\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma_1=\int_{\sigma_2}\frac{\partial V}{\partial p}d\sigma_2\,. \tag{5}$$

Se alle forze sostituiamo velocità di ugual direzione e intensità, la (5) diviene la nota equazione dell'idrodinamica che è verificata nel moto permanente di un fluido incompressibile, e le linee di forza divengono le linee di flusso. Dunque la distribuizione delle forze Newtoniane nello spazio è uguale alla distribuzione delle velocità di un fluido incompressibile in moto permanente.

Trasformiamo ora l'equazioni differenziali (2) in coordinate ortogonali qualunque. Siano ρ_1, ρ_2, ρ_3 i parametri di tre sistemi di superficie ortogonali, e denotiamo con q la quantità a cui sono uguali i tre rapporti che formano le equazioni (2), avremo

$$\Sigma_s\frac{\partial x_i}{\partial\rho_s}d\rho_s=q\,\Sigma_s\frac{\partial V}{\partial\rho_s}\frac{\partial\rho_s}{\partial x_i}\,. \tag{6}$$

Nel §. II. abbiamo trovato

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho_s} = \frac{1}{h_s^2} \frac{\partial \rho_s}{\partial x_i},$$

dove

$$h_s^2 = \Delta \rho_s ;$$

quindi se denotiamo con α_{si} il coseno dell'angolo che la normale alla superficie ρ_s fa coll'asse x_i, avremo

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho_s} = \frac{\alpha_{si}}{h_s}$$

e la equazione (6) diviene

$$\Sigma_s \frac{\alpha_{si} d\rho_s}{h_s} = q \Sigma_s \alpha_{si} h_s \frac{\partial V}{\partial \rho_s} .$$

Moltiplicando per α_{ni}, dando i tre valori 1, 2, 3 all'indice i e sommando le tre equazioni così ottenute, avremo

$$\frac{d\rho_n}{h_n} = q h_n \frac{\partial V}{\partial \rho_n} ,$$

e quindi:

$$d\rho_1 : d\rho_2 : d\rho_3 = h_1^2 \frac{\partial V}{\partial \rho_1} : h_2^2 \frac{\partial V}{\partial \rho_2} : h_3^2 \frac{\partial V}{\partial \rho_3} ,$$

e dividendo ciascun rapporto per $h_1 \; h_2 \; h_3$, si può anche scrivere

$$(7) \qquad d\rho_1 : d\rho_2 : d\rho_3 = \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} : \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} : \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_3} .$$

Ma nel §. II. abbiamo trovato

$$H_i^2 = \Sigma_s \frac{\partial x_s^2}{\partial \rho_i^2} = \frac{1}{h_i^2} ;$$

onde le equazioni (7) possono scriversi sotto la forma

$$(8) \qquad d\rho_1 : d\rho_2 : d\rho_3 = \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} : \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} : \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_3} .$$

Nello spazio non occupato da masse, abbiamo

$$\Delta^2 V = 0$$

e quindi, per l'equazione (8) del §. II.

$$(9)\ \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\right)=0\,.$$

Ora *Iacobi* nella sua *Theoria novi multiplicatoris* ha dimostrato il seguente teorema:

Date l'equazioni differenziali

$$(10)\qquad d\rho_1 : d\rho_2 : d\rho_3 = P_1 : P_2 : P_3\,,$$

se

$$(11)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial\rho_1}+\frac{\partial P_2}{\partial\rho_2}+\frac{\partial P_3}{\partial\rho_3}=0\,,$$

trovato un integrale

$$(12)\qquad f(\rho_1\,,\ \rho_2\,,\ \rho_3)=c_1\,,$$

si otterrà l'altro immediatamente, per mezzo di una quadratura, dalla equazione

$$(13)\qquad \int\frac{\partial\rho_3}{\partial c_1}(P_2d\rho_1-P_1d\rho_2)=c_2\,,$$

dove ρ_3 è espresso in funzione di ρ_1, ρ_2 e c_1 mediante la (12).

Ponendo:

$$P_1=\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\,,\ P_2=\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\,,\ P_3=\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\,,$$

l'equazioni (10) e (11) divengono le (8) e (9), e la (13) diviene

$$(14)\qquad \int\frac{\partial\rho_3}{\partial c_1}H_3\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}d\rho_2-\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}d\rho_1\right)=c_2.$$

Dunque trovato un integrale (12) dell' equazioni differenziali (8) l'altro sarà dato immediatamente dalla equazione (14).

Se le superficie di livello fanno parte di un sistema triplo di superficie ortogonali, si potrà esprimere V in funzione di una soltanto delle coordinate, per esempio di ρ_3: quindi

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_1} = 0 , \frac{\partial V}{\partial \rho_2} = 0$$

e gl'integrali dell'equazioni (8), saranno

$$\rho_1 = c_1 , \rho_2 = c_2 .$$

Dunque se le superficie di livello formano uno dei tre sistemi di superficie ortogonali, le linee di forza sono le intersezioni delle superficie degli altri due sistemi.

Nel §. XIV. abbiamo dimostrato che uno strato di livello disteso sopra un ellissoide E, ha per superficie di livello, nello spazio esterno, ellissoidi omofocali ad E, queste colle iperboloidi a una e a due falde, omofocali ad E, formano un sistema triplo di superficie ortogonali, quindi le linee di forza nello spazio esterno saranno le intersezioni delle iperboloidi a una e a due falde omofocali ad E.

Se la funzione potenziale V è indipendente da una delle coordinate, per esempio da ρ_3, avremo

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0 ,$$

quindi un integrale sarà

$$\rho_3 = c_1 ,$$

e la equazione (14) che dà l'altro integrale, diverrà

$$\int H_3 \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} d\rho_2 - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} d\rho_1 \right) = c_2 . \tag{15}$$

Se le masse sono distribuite simmetricamente intorno a una retta che prenderemo per asse delle z, e poniamo

$$x_1 = t\cos\theta , \; x_2 = t\operatorname{sen}\theta , \; x_3 = z ,$$

t, θ e z saranno i parametri di tre sistemi di superficie ortogonali e potremo prendere

$$\rho_1 = t\,,\ \rho_2 = z\ ,\ \rho_3 = \theta.$$

A cagione della simmetria della distribuzione delle masse intorno all'asse z, la funzione V sarà indipendente da θ, quindi un integrale sarà

$$\theta = c_1\,,$$

ed essendo

$$H_1^2 = \Sigma_s \frac{\partial x_s^2}{\partial t^2} = 1\,,\ H_2^2 = \Sigma_s \frac{\partial x_s^2}{\partial z^2} = 1\,,\ H_3^2 = \Sigma_s \frac{\partial x_s^2}{\partial \theta^2} = t^2\,,$$

l'altro integrale (15) diverrà

$$W = \int t\left(\frac{\partial V}{\partial z}\,dt - \frac{\partial V}{\partial t}\,dz\right) = c_2\,. \tag{16}$$

Determiniamo le linee di forza dell' ellissoidi eterogenee di rivoluzione, delle quali abbiamo trovato nel §. XIV. la funzione potenziale

$$V = \pi a^2 c \int_{\lambda_1}^{\infty} F(H)\,\frac{d\lambda}{D}\,,$$

dove

$$D = (a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}\,,$$

$$H = 1 - \frac{t^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}\,, \tag{17}$$

e λ_1 è il massimo valore di λ che sodisfa l'equazione

$$H = 0\,. \tag{18}$$

Denotando colla caratteristica δ i differenziali presi secondo le linee di forza, avremo

$$\delta W = 2\pi a^2 c \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{F'(H)}{D} \begin{vmatrix} \dfrac{t^2}{a^2+\lambda} & \delta t \\ \dfrac{zt}{c^2+\lambda} & \delta z \end{vmatrix} d\lambda - \frac{\pi a^2 c F(0)}{D_1} \begin{vmatrix} t\,\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial z} & \delta z \\ t\,\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t} & \delta t \end{vmatrix} \tag{19}$$

Ora abbiamo

$$\begin{vmatrix} \frac{t^2}{a^2+\lambda} & \delta t \\ \frac{zt}{c^2+\lambda} & \delta z \end{vmatrix} = \frac{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{2z} \begin{vmatrix} \frac{t^2}{(a^2+\lambda)^2} & \frac{2t\delta t}{a^2+\lambda} \\ \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} & \frac{2z\delta z}{c^2+\lambda} \end{vmatrix}$$

Sommando la seconda colla prima linea del determinante del secondo membro, ed osservando che dall'equazione (17), si deduce

$$-\delta H = \frac{2t\delta t}{a^2+\lambda} + \frac{2z\delta z}{c^2+\lambda},$$

$$\text{(20)} \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{t^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2},$$

otterremo

$$\begin{vmatrix} \frac{t^2}{a^2+\lambda} & \delta t \\ \frac{zt}{c^2+\lambda} & \delta z \end{vmatrix} = (a^2+\lambda)\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\delta z + \frac{1}{2}\frac{z\delta H}{c^2+\lambda}\right)$$

e quindi

$$\text{(21)} \qquad 2\frac{F'(H)}{D} \begin{vmatrix} \frac{t^2}{a^2+\lambda} & \delta t \\ \frac{tz}{c^2+\lambda} & \delta z \end{vmatrix} = \frac{\delta(zF(H))}{\sqrt{(c^2+\lambda)^3}} + 2\delta z \frac{d}{d\lambda}\frac{F(H)}{\sqrt{c^2+\lambda}}$$

Dalla equazione (18), abbiamo anche

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} = \frac{2z}{c^2+\lambda_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = \frac{2t}{a^2+\lambda_1},$$

e quindi

$$\begin{vmatrix} t\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} & \partial z \\ t\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} & \partial t \end{vmatrix} = \frac{(a^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}{z\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}} \begin{vmatrix} \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)^2} & \frac{2z\delta z}{c^2+\lambda_1} \\ \frac{t^2}{(a^2+\lambda_1)^2} & \frac{2t\delta t}{a^2+\lambda_1} \end{vmatrix}.$$

Sommando la seconda colla prima linea nel determinante del secondo membro, ed osservando la equazione (20) e l'altra

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}\,\delta\lambda_1 = \frac{2t\delta t}{a^2+\lambda_1} + \frac{2z\delta z}{c^2+\lambda_1},$$

che si deduce dalla (18), avremo

$$\begin{vmatrix} t\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial z} & \delta z \\ t\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t} & \delta t \end{vmatrix} = (a^2+\lambda_1)\begin{vmatrix} \dfrac{z}{c^2+\lambda_1} & 2\delta z \\ 1 & \delta\lambda_1 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$(22)\qquad \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} t\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial z} & \delta z \\ t\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t} & \delta t \end{vmatrix} = \frac{z\delta\lambda_1}{\sqrt{(c^2+\lambda_1)^3}} - \frac{2\delta z}{\sqrt{c^2+\lambda_1}}.$$

Sostituendo nella equazione (19) i valori (21) e (22), avremo

$$\delta W = \pi a^2 c\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\delta(zF(H))}{\sqrt{(c^2+\lambda)^3}}\,d\lambda - \frac{\pi a^2 cz F(0)\delta\lambda_1}{\sqrt{(c^2+\lambda_1)^3}} = \pi a^2 c\delta\left[z\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{F(H)d\lambda}{\sqrt{(c^2+\lambda)^3}}\right]$$

e quindi

$$(23)\qquad W = \pi a^2 cz\int_{\lambda_1}^{\infty}F(H)\,\frac{d\lambda}{\sqrt{(c+\lambda)^3}} = c_2\,.$$

La funzione

$$V = \pi a^2\int_{\lambda_1}^{\infty}F(H)\frac{d\lambda}{D}$$

dove in H e in D è posto $c=0$ per ciò che abbiamo dimostrato nel §. XV. è funzione potenziale di un disco circolare eterogeneo di raggio a. Per esso si ottiene la seconda equazione integrale delle linee di forza, dividendo la (23) per c e ponendo quindi $c=0$. Questo integrale è stato dato dal prof. *Beltrami* in una Nota *Intorno ad alcune questioni di Elettrostatica* letta all'Istituto Lombardo il 14 Marzo 1877.

Se le masse attrattive e ripulsive sono corpi, superficie cilindriche cogli assi paralleli all'asse delle z, e rette parallele al medesimo asse, tutte estese indefinitamente nelle direzioni delle z, la funzione potenziale V sarà indipendente da z, e prendendo per sistema triplo di superficie ortogonali, piani paralleli al piano xy, e due sistemi di superficie cilindriche che hanno per basi sul piano xy due sistemi di linee ortogonali

$$\rho_1 = c_1 \, , \; \rho_2 = c_2 \, ,$$

le equazioni delle linee di forza saranno

$$z = c_1 \, , \; W = \int \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} d\rho_1 - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} d\rho_2 \right) = c_2 \, .$$

Se le coordinate ρ_1 e ρ_2 oltre ad essere ortogonali sono anche isoterme, cioè se

$$H_1 = H_2 = H \, ,$$

per cui l'elemento lineare nel piano ha la forma

$$ds^2 = H^2 (d\rho_1^2 + d\rho_2^2) \, ,$$

avremo:

$$W = \int \left(\frac{\partial V}{\partial \rho_2} d\rho_1 - \frac{\partial V}{\partial \rho_1} d\rho_2 \right) = c_2 \, ;$$

e quindi

$$\frac{\partial W}{\partial \rho_1} = \frac{\partial V}{\partial \rho_2} \, , \tag{24}$$
$$\frac{\partial V}{\partial \rho_1} = - \frac{\partial W}{\partial \rho_2} \, .$$

Moltiplicando per $i = \sqrt{-1}$ la prima equazione e sommandola colla seconda, abbiamo

$$\frac{\partial (V + iW)}{\partial \rho_1} = i \frac{\partial (V + iW)}{\partial \rho_2}$$

onde

$$V + iW = f(\rho_1 + i\rho_2)$$

essendo f una funzione qualunque.

Derivando la prima dell' equazione (24) rispetto a ρ_1 la seconda rispetto a ρ_2 e sommando, avremo

$$\Delta^2 W = 0 ,$$

ed abbiamo il seguente teorema:

Se $V + iW$ è funzione della variabile complessa $\rho_1 + i\rho_2$, e le equazioni delle superficie di livello sono

$$V = \text{costante} ,$$

denotando ρ_1 e ρ_2 i parametri di due sistemi di linee piane ortogonali isoterme, l'equazioni delle linee di Forza saranno

$$z = c_1 , \; W = c_2 ;$$

e se le equazioni delle superficie di livello sono

$$W = \text{costante} ,$$

quelle delle linee di Forza saranno

$$z = c_1 , \; V = c_2 .$$

CAPITOLO SECONDO

ELETTROSTATICA

§. I.

Ipotesi fondamentale.

Per ispiegare i fenomeni *elettrici* supponiamo che in ogni elemento dei corpi ponderabili esistano due fluidi imponderabili, uno dei quali chiameremo *elettricità positiva*, l'altro *elettricità negativa*; che due elementi di elettricità della stessa specie si respingano con una forza direttamente proporzionale alle loro masse, e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza; che due elementi di elettricità di specie differente si attraggano con una forza che è pure in ragion diretta delle loro masse, e in ragione inversa del quadrato della loro distanza, e che la intensità della forza con cui un elemento di elettricità respinge un altro elemento di elettricità della stessa specie, sia uguale alla intensità della forza con cui attrae un elemento di elettricità di specie differente, di massa uguale e situato alla stessa distanza. Quindi se in un punto di un corpo vi saranno masse uguali di elettricità delle due specie, non emanerà dallo stesso alcuna azione sopra le elettricità che si troveranno nello spazio che lo circonda.

Quando un elemento di un corpo contiene masse uguali di elettricità positiva e negativa, si dice che è nello *stato naturale*. Se a un elemento che si trova nello stato naturale si toglie o si aggiunge una porzione di elettricità di una specie, oppure si toglie una porzione di elettricità di una specie, e se ne aggiunge una porzione dell'altra specie, diverranno differenti le masse delle elettricità positiva e negativa, e l' elemento eserciterà un' azione sopra le elettricità che si trovano nello spazio che lo circonda. Diremo allora che quell' elemento è *elettrizzato*, e chiameremo elettricità *libera* la differenza delle masse delle due elettricità contenute nell'elemento. L'elettricità libera sarà positiva o negativa secondo che la massa dell'elettricità positiva è maggiore o minore della massa della elettricità negativa.

Un corpo in cui i fluidi elettrici si muovono liberamente, obbedendo alle azioni esercitate sopra di essi, si chiama *conduttore*. Un corpo in cui i fluidi elettrici, ancorchè sollecitati al moto da forze qualunque, non possono passare da uno ad un altro elemento, si dice *coibente*. I corpi reali non sono nè perfettamente conduttori, nè perfettamente coibenti. In natura, ogni corpo oppone una resistenza al moto dei fluidi elettrici, la quale però è molto piccola in quei corpi che si considerano come conduttori, ed ogni corpo permette il passaggio dei fluidi elettrici da un elemento ad un altro, ma questo passaggio è estremamente lento in quelli che si considerano come coibenti. Inoltre come vedremo in seguito, dovremo poi supporre che in ogni elemento i fluidi possono muoversi liberamente; ma ora converrà considerare prima il caso di corpi perfettamente conduttori e di corpi perfettamente coibenti, e supporre inoltre che i fluidi elettrici non possano muoversi neppure negli elementi dei corpi coibenti.

Prenderemo per unità di massa di fluido elettrico, la quantità di questo fluido che concentrata in un elemento ds di uno spazio, esercita una forza di ripulsione uguale alla unità di forza, sopra un elemento ds' che si trova a una distanza uguale alla unità, e contiene una massa dello stesso fluido uguale a quella contenuta in ds.

Se in un elemento ds di un dato spazio la quantità della elettricità libera è dm, la densità ρ della elettricità in ds sarà

$$\rho = \frac{dm}{ds},$$

e ρ sarà un numero positivo se la elettricità libera è positiva, e un numero negativo se la elettricità libera è negativa.

È chiaro che con questa ipotesi, e con queste convenzioni, la forza F esercitata da un elemento di spazio ds in cui è una massa elettrica dm, sopra un altro elemento di spazio ds' che contiene una massa dm', se r è la distanza di ds da ds' sarà sempre data dall'equazione

$$F = \frac{dm\, dm'}{r^2} = \frac{\rho\rho'\, ds\, ds'}{r^2}.$$

Se dm' è l' unità di massa di elettricità positiva, avremo

$$F = \frac{dm}{r^2} = \frac{\rho\, ds}{r^2};$$

quindi la funzione potenziale V della elettricità che occupa uno spazio S colla densità ρ, sarà

$$V = -\int_S \frac{\rho\, ds}{r},$$

ed avrà le proprietà dimostrate nel Capitolo I.

§. II.

Stato di equilibrio elettrico sopra un numero qualunque di conduttori.

Siano dati n corpi conduttori K_1, K_2, ... K_n tutti nello stato naturale, ed immersi in uno spazio S perfettamente coibente, e supponiamo comunicate ad essi rispettivamente le masse elettriche E_1, E_2, ... E_n. Siano poi nello spazio S_m i corpi coibenti C_1, C_2, ... C_m elettrizzati in un modo qualunque, ed U sia la funzione potenziale della elettricità che si troverà distribuita in essi in modo invariabile. Supporremo fissi i coibenti, e quindi U invariabile. Sotto l' azione dei coibenti elettrizzati e delle masse elettriche E, in ciascun conduttore K_i l'elettricità libera si muoverà, e quella contenuta in ogni elemento si decomporrà muovendosi una certa massa di fluido positivo in una direzione ed una certa massa di fluido negativo in direzione opposta, ed il moto continuerà finchè non si avrà sopra i conduttori una distribuzione dalla quale risulti sopra ogni elemento di ciascun conduttore un'azione uguale e contraria a quella esercitata dai coibenti. Il moto dei fluidi elettrici nei conduttori durerà finchè non saremo arrivati a questo stato di equilibrio, e se questo stato di equilibrio è stabile non potremo avere più altro che una serie di oscillazioni dello stato elettrico intorno a questo stato. In realtà non è apprezzabile il tempo richiesto perchè l' elettricità arrivata allo stato di equilibrio, in esso si riduca in quiete. Riservandoci a esaminare questo fatto quando parleremo della elettricità in movimento, limitiamoci ora a determinare le condizioni necessarie e sufficienti dell' equilibrio stabile.

Affinchè un sistema di masse sotto l' azione di forze date sia in equilibrio stabile è necessario e sufficiente che il potenziale di tutto il sistema sia un massimo. Se denotiamo con V la funzione potenziale dell'elettricità di tutti i conduttori, con ρ_i la densità nel conduttore K_i, con ρ' la densità nei coibenti C, il potenziale P di tutto il sistema di conduttori e di coibenti, sarà

$$(1) \qquad P = \frac{1}{2}\Sigma_i \int_{K_i} (V + U)\, \rho_i dS + \frac{1}{2}\int_C (V+U)\rho' dS\,,$$

denotando con C l'aggregato degli spazi occupati dai coibenti.

Trasformando il secondo membro nel modo tenuto per ottenere la formula (18) nel §. XX. del Cap. I. avremo per P la espressione

$$P = -\frac{1}{8\pi}\int \Delta(V+U)\, dS\,,$$

dove l' integrale è esteso a tutto lo spazio, e quindi P è sempre una quantità negativa. Affinchè P sia massimo dovrà per variazioni qualunque $\delta\rho_i$ nella densità di ciascun conduttore K_i, per le quali non varia E_i, diminuire il potenziale P. La condizione d'invariabilità della elettricità libera E_i, sarà espressa dalla equazione

$$(2) \qquad \int_{K_i} \delta\rho_i \, dS = 0 .$$

Denotiamo con $V + \delta V$ e $P + \delta P$ ciò che rispettivamente divengono V e P quando ρ_i diviene $\rho_i + \delta\rho_i$. Avremo

$$(3) \quad P + \delta P = \frac{1}{2} \Sigma_i \int_{K_i} (V + \delta V + U)(\rho_i + \delta\rho_i) \, dS + \frac{1}{2} \int_C (V + \delta V + U) \rho' dS .$$

Sottraendo la equazione (1) dalla (3), osservando che, per il teorema espresso dalla equazione (11) del §. XX, si ha

$$\Sigma_i \int_{K_i} \rho_i \, \delta V \, dS = \Sigma_i \int_{K_i} V \, \delta\rho_i \, dS ,$$

$$\int_C \rho' \, \delta V \, dS = \Sigma_i \int_{K_i} U \, \delta\rho_i \, dS ,$$

otterremo

$$(4) \qquad \delta P = \Sigma_i \int_{K_i} (V + U) \, \delta\rho_i \, dS + \frac{1}{2} \Sigma_i \int_{K_i} \delta V \, \delta\rho_i \, dS .$$

Ma

$$\Sigma_i \int_{K_i} \delta V \delta\rho_i dS = -\frac{1}{8\pi} \int \Delta(\delta V) \, dS ,$$

quindi

$$\delta P = \Sigma_i \int_{K_i} (V + U) \, \delta\rho_i \, dS - \frac{1}{8\pi} \int \Delta(\delta V) \, dS .$$

Se in ogni conduttore K_i si ha

$$V + U = c_i, \tag{5}$$

essendo ciascuna c_i una costante, e se $\delta\rho_i$ sodisfa alla equazione (2), avremo

$$\int_{K_i} (V + U)\, \delta\rho_i dS = 0,$$

quindi

$$\delta P = -\frac{1}{8\pi}\int \Delta(\delta V)\, dS,$$

ed ogni variazione di densità diminuisce il potenziale, che perciò è un massimo. Dunque se l'elettricità è distribuita sopra ciascun conduttore in modo che la funzione potenziale V sommata colla funzione U sia uguale a una costante in ciascun conduttore, avremo uno stato di equilibrio stabile.

Se in un conduttore qualunque K_i non è $V + U$ uguale a una costante, si potrà sempre variare la densità in modo che, la variazione sodisfacendo la equazione (2), sia il δP positivo, e quindi non si avrà l'equilibrio. Infatti ponendo

$$AS_i = \int_{K_i} (V + U)\, dS, \tag{6}$$

dove S_i denota la superficie di K_i, se $\delta\rho_i$ sodisfa la equazione (2), avremo

$$\int_{K_i} (V + U)\, \delta\rho_i dS = \int_{K_i} (V + U - A)\, \delta\rho_i dS.$$

Prendendo

$$\delta\rho_i = h\,(V + U - A), \tag{7}$$

sarà sodisfatta la equazione (2) a cagione della (6), e ponendo

$$m = \int_{K_i} (V + U - A)^2\, dS, \tag{8}$$

avremo

$$\int_{K_i}(V+U)\delta\rho_i dS = hm\,. \tag{9}$$

Ponendo

$$v = -\int_{K_i}\frac{(V+U-A)\,dS}{r} = -\frac{1}{h}\int_{K_i}\frac{\delta\rho_i}{r}\,dS\,,$$

e

$$p = -\int_{K_i}(V+U-A)\,v dS = \frac{1}{4\pi}\int\Delta(v)dS, \tag{10}$$

sarà $\delta V = hv$, e quindi

$$\int_{K_i}\delta V\delta\rho_i dS = -h^2p, \tag{11}$$

e sostituendo i valori (9) e (11) nella equazione (4), si ottiene

$$\delta P = hm - \frac{h^2p}{2}\,. \tag{12}$$

Dall'equazioni (8) e (10) risulta evidente che m e p sono quantità necessariamente positive; e se $V+U$ è una funzione finita e continua in tutto lo spazio occupato da K_i, dalla (8) risulta che m è differente da zero, se non è in tutto questo spazio $V+U-A=0$.

Quindi potremo prendere nella equazione (11)

$$0 < h < \frac{2m}{p}\,, \tag{13}$$

ed avremo

$$\delta P > 0$$

cioè il potenziale della distribuzione $\rho_i + \delta\rho_i$, maggiore del potenziale della distribuzione ρ_i. Dunque abbiamo il seguente teorema:

Affinchè in un sistema di conduttori e di coibenti elettrizzati la elettricità sia in equilibrio, è necessario e sufficiente che la funzione potenziale della elettricità di tutto il sistema abbia un valore costante in ciascun conduttore.

Non vi possono essere due distribuzioni differenti delle masse elettriche E_i sopra i conduttori K_i sotto l'azione dei coibenti elettrizzati C, per le quali il potenziale P sia un massimo. Infatti, supponiamo che ne esistano due, e siano V la funzione potenziale, ρ_i le densità elettriche e P il potenziale di una di queste distribuzioni, $V + v$ la funzione potenziale, $\rho_i + \sigma_i$ le densità elettriche e P' il potenziale dell' altra distribuzione. Poichè P è un massimo, e che quindi $V + U$ è costante in tutti i conduttori, valendesi delle formule precedenti che danno il valore di δP, si vede subito che variando di $h\sigma_i$ le densità ρ_i, avremo

$$P_h = -\frac{1}{8\pi}\int \Delta (V + U)\, dS - \frac{h^2}{8\pi}\int \Delta (v)\, dS \,,$$

$$P' = -\frac{1}{8\pi}\int \Delta (V + U)\, dS - \frac{1}{8\pi}\int \Delta (v)\, dS \,,$$

ove P_h indica il valore del potenziale corrispondente alla densità $\rho_i + h\sigma_i$.

Ora se $h = 1 - \varepsilon^2$, ed ε sufficientemente piccolo, poichè P' è un massimo, dovrà essere

$$P' > P_h \,,$$

e quindi

$$(h^2 - 1)\int \Delta (v)\, dS > 0 \,,$$

onde

$$\varepsilon^2(\varepsilon^2 - 2) > 0$$

diseguaglianza assurda.

Se V è la funzione potenziale della distribuzione delle masse E_i nei conduttori K_i, che sodisfa all'equazione (5), e quindi dà a P il valor massimo, nello spazio occupato dal conduttore K_i, avremo

$$(14) \qquad \Delta^2 V + \Delta^2 U = 0 .$$

Ma nello spazio occupato dai conduttori non si trova alcuna porzione delle masse elettriche delle quali è funzione potenziale U, quindi in esso

$$\Delta^2 U = 0 ,$$

e la equazione (14) diviene

$$\Delta^2 V = 0 .$$

Ora nello spazio occupato da K_i si ha

$$\Delta^2 V = 4\pi \rho_i ,$$

onde

$$\rho_i = 0 ,$$

Dunque in ogni conduttore l'elettricità nello stato di equilibrio non può trovarsi altro che sopra le superficie che ne formano il contorno.

Se denotiamo con p_s la normale alla superficie σ_s del corpo K_s diretta verso lo spazio esterno a K_s, con V_e il valor di V nello spazio esterno e con V_i quello nello spazio interno a K_s, avremo alla superficie σ_s

$$(15) \qquad \frac{\partial V_e}{\partial p_s} - \frac{\partial V_i}{\partial p_s} = 4\pi \rho_s .$$

Ora dalla equazione (5) abbiamo

$$\frac{\partial V_i}{\partial p_s} + \frac{\partial U}{\partial p_s} = 0 ,$$

onde:

$$\frac{\partial V_i}{\partial p_s} = -\frac{\partial U}{\partial p_s} ,$$

e sostituendo nella (15), si ottiene

$$\frac{\partial(V_e + U)}{\partial p_s} = 4\pi\rho_s .$$

Moltiplicando per $d\sigma_s$, integrando ed estendendo l'integrazione a tutta la superficie σ_s, avremo

$$(16) \qquad \int_{\sigma_s} \frac{\partial(V_e + U)}{\partial p_s} d\sigma_s = 4\pi \int_{\sigma_s} \rho_s d\sigma_s = 4\pi E_s$$

L'equazioni (16) che sono in numero uguale al numero dei conduttori determinano le costanti c_i delle quali è funzione la V.

Se un conduttore K_s invece di essere isolato, è in comunicazione e forma un solo conduttore colla terra, cioè con un conduttore immensamente grande allo stato naturale, in cui la funzione potenziale è uguale a zero, dovrà in esso essere

$$V + U = c_s = 0 ,$$

e la quantità di elettricità libera che si troverà sopra il conduttore K_s sarà data dall'equazione (16).

Se in un conduttore K_s vi è uno spazio vuoto S_i, ed in S_i non vi è alcun corpo elettrizzato, la funzione potenziale V + U sodisfarà in tutto questo spazio alla equazione

$$\Delta^2 (V + U) = 0 ,$$

vi si conserverà insieme colle sue derivate a un sol valore, finita e continua, e sopra la superficie che lo limita avrà il valore costante c_s; quindi per l'ultimo teorema del §. XXI. del Cap. I, sarà in tutto lo spazio S_i uguale a c_s e vi sarà

$$V = c_s - U .$$

Se il sistema si riduce a un sol corpo conduttore K in comunicazione colla terra, il quale ha uno spazio vuoto S' nel suo interno, e in S' è posto un coibente elettrizzato la cui funzione potenziale è U, mentre V è la funzione potenziale della elettricità in equilibrio sopra K, allora la funzione potenziale V + U sarà uguale a zero sopra la superficie esterna di K e sopra una sfera di raggio infinito, e quindi per il teorema del §. XXI.

del Cap. I. sarà uguale a zero in tutto lo spazio esterno a K; avremo dunque il seguente teorema:

Le azioni elettriche che emanano da punti situati nello spazio racchiuso da un involucro conduttore posto in comunicazione colla terra, sono nulle in tutti i punti dello spazio esterno all'involucro.

Se denotiamo con ρ la densità sopra la superficie esterna di K, e con p la normale diretta verso l'esterno, sarà

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial p} = 4\pi\rho = 0\,,$$

perchè $V+U$ è uguale a zero in tutto lo spazio esterno a K. Dunque la superficie esterna di K sarà allo stato naturale.

Denotando con ρ la densità dell'elettricità sopra la superficie interna di K che forma il contorno dello spazio vuoto S', e con p la normale alla superficie diretta verso l'interno di S', avremo

$$\frac{\partial(V+U)}{\partial p} = 4\pi\rho\,.$$

Se E denota la elettricità libera sopra la superficie interna di K, sarà

$$4\pi E = \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial p}\,d\sigma + \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial p}\,d\sigma\,.$$

Ma per il teorema di *Green*, essendo in S'

$$\Delta^2 V = 0\,,$$

avremo

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial p}\,d\sigma = 0\,,$$

e per lo stesso teorema

$$\int_\sigma \frac{\partial U}{\partial p}\,d\sigma = -\int_{S'} \Delta^2 U\,dS' = -4\pi \int_{S'} \rho'\,dS' = -4\pi E'$$

essendo ρ' la densità ed E' la quantità dell' elettricità contenuta in S'. Onde

$$E = - E'.$$

Abbiamo quindi il seguente teorema:

Se in uno spazio vuoto chiuso da un conduttore posto in comunicazione colla terra esistono corpi elettrizzati, sopra la superficie interna del conduttore si accumulerà una quantità di elettricità libera uguale e di segno contrario a quella contenuta nei corpi elettrizzati che si trovano nell' interno.

§. III.

Funzione potenziale di un numero qualunque di conduttori e di coibenti elettrizzati.

Se si ha un numero qualunque di conduttori nello stato di equilibrio elettrico, alcuni dei quali che denoteremo con K, isolati e carichi rispettivamente delle masse E, di elettricità libera, altri che denoteremo con H, in comunicazione colla terra, e si hanno altri corpi coibenti elettrizzati che occupano uno spazio C, nei quali l'elettricità ha la densità ρ, la funzione potenziale V del sistema di tutti questi corpi per ciò che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente, deve avere un valore costante in ciascun conduttore, e nello spazio C deve sodisfare la equazione

$$\Delta^2 V = 4\pi\rho ,$$

e in tutto il rimanente dev' essere

$$\Delta^2 V = 0 .$$

La determinazione di questa funzione si può ridurre alla soluzione di due problemi:

1.° Determinare la funzione potenziale v, che sopra il conduttore K_s è uguale alla unità, sopra tutti gli altri è uguale a zero, e in tutto lo spazio sodisfa alla equazione:

$$\Delta^2 v_s = 0\,.$$

2.° Determinare la funzione potenziale w che in tutti i conduttori è uguale a zero, nello spazio C sodisfa alla equazione:

$$\Delta^2 w = 4\pi\rho\,;$$

e in tutto il rimanente spazio all'altra

$$\Delta^2 w = 0\,.$$

Se non vi sono coibenti elettrizzati, e tutti i conduttori, tranne K_i, sono in comunicazione colla terra, e se comunichiamo a K_i una massa di elettricità uguale ad E, la funzione potenziale v, nello stato di equilibrio elettrico, sarà uguale a una costante determinata c sopra K_i, ed uguale a zero sopra tutti gli altri conduttori. La funzione $v_i = \frac{v}{c}$ sarà uguale alla unità sopra K_i, ed uguale a zero sopra tutti gli altri conduttori, ed essendo

$$\int_{\sigma_i} \frac{\partial v}{\partial p_i}\, d\sigma = 4\pi \mathrm{E}\,,$$

è chiaro che la massa elettrica della quale è funzione potenziale v_i sarà $\frac{\mathrm{E}}{c}$. Questa massa di elettricità libera che comunicata al conduttore isolato K_i in presenza degli altri conduttori in comunicazione colla terra, rende la funzione potenziale uguale alla unità sopra K_i, si chiama la *capacità* elettrica di K_i.

La funzione potenziale w che risolve il secondo problema, è quella dei coibenti elettrizzati e dell' elettricità nello stato di equilibrio nei conduttori K ed H posti tutti in comunicazione colla terra.

Determinate le funzioni v_s e w, prendiamo

(1) $$\mathrm{V} = \Sigma c_s v_s + w\,.$$

Sopra un conduttore K_i sarà

$$v_i = 1\,,\ w = 0\,;$$

e per $s \lessgtr 1$ si avrà

$$v_s = 0\,,$$

onde

$$V = c_i\,.$$

Sopra un conduttore H_i sarà qualunque sia il valore di s

$$v_s = 0\,,\ w = 0\,,$$

e quindi

$$V = 0\,.$$

Nello spazio C, avremo

$$\Delta^2 V = \Delta^2 w = 4\pi\rho\,,$$

in tutto il rimanente

$$\Delta^2 V = 0\,.$$

Dunque V è la funzione potenziale della elettricità dei coibenti elettrizzati e dei conduttori nello stato di equilibrio elettrico.

Denotando con p_s la normale al conduttore K_s diretta verso lo spazio esterno, con V_e il valore di V nello spazio esterno, con V_i quello nello spazio interno ai conduttori, avremo alla superficie σ_l di K_l

$$\frac{\partial V_e}{\partial p_l} = \Sigma_s c_s \frac{\partial v_s}{\partial p_l} + \frac{\partial w_e}{\partial p_l}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial p_l} = 0\,.$$

Sottraendo, e denotando con ρ_l la densità sopra la superficie σ_l, si ottiene

$$4\pi\rho_l = \Sigma_s c_s \frac{\partial v_s}{\partial p_l} + \frac{\partial w_e}{\partial p_l}\,.$$

Moltiplicando per $d\sigma_l$, integrando ed estendendo l'integrazione a tutta la superficie σ_l di K_l, ponendo

$$(2)\qquad \int_{\sigma_l}\frac{\partial v_s}{\partial p_l}\,d\sigma=\gamma_{sl}\,,\int_{\sigma_l}\frac{\partial w_l}{\partial p_l}\,d\sigma=N_l$$

avremo

$$(3)\qquad E_l=\Sigma_s c_s\gamma_{sl}+N_l$$

Dall'equazioni (2) si deduce che γ_{sl} è la quantità di elettricità libera che si trova sopra il conduttore K_l quando, non essendovi i coibenti, e tutti i conduttori, tranne K_s, essendo in comunicazione colla terra, sopra K_s si trova tanta elettricità da rendere la funzione potenziale uguale ad uno; ed N_l è la quantità di elettricità libera che si trova sopra K_l, quando in presenza dei coibenti elettrizzati tutti i conduttori sono posti in comunicazione colla terra.

Se denotiamo con S_e lo spazio connesso limitato dalle superficie dei conduttori e da una sfera di raggio infinito, le funzioni v_s e v_l saranno in tutto lo spazio S_e a un sol valore, finite e continue insieme colle loro derivate, e sodisfaranno alla equazione

$$\Delta^2 v=0\,;$$

dunque potremo applicare il teorema di *Green*, ed avremo

$$(4)\qquad \Sigma_i\int_{\sigma_i}\left(v_s\frac{\partial v_l}{\partial p_i}-v_l\frac{\partial v_s}{\partial p_i}\right)d\sigma=0\,.$$

Ma $v_s=1$ sopra σ_s ed uguale a zero sopra tutte le altre superficie di conduttori, e $v_l=1$ sopra σ_l, ed uguale a zero sopra le superficie degli altri conduttori; quindi la equazione (4) diviene

$$\int_{\sigma_s}\frac{\partial v_l}{\partial p_s}=\int_{\sigma_l}\frac{\partial v_s}{\partial p_l}$$

ossia

$$(5)\qquad \gamma_{ls}=\gamma_{sl}\,,$$

ed abbiamo il seguente teorema.

La quantità di elettricità libera che, non essendovi i coibenti elettrizzati, si troverà sopra un conduttore K_s, quando tutti i conduttori, eccettuato K_i, sono in comunicazione colla terra e sopra K_i la funzione potenziale è uguale all'unità, è uguale a quella che si troverà sopra K_i, quando tutti i conduttori, eccettuato K_s, sono in comunicazione colla terra, e sopra K_s la funzione potenziale è uguale alla unità.

Ponendo:

$$D = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22} \ldots \gamma_{nn}$$

e denotando con α_{si} l'elemento reciproco a γ_{si} nel determinante D, dall'equazione (3) avremo

$$c_s = \Sigma_i \alpha_{si} (E_i - N_i) \tag{6}$$

ed a cagione della equazione (5),

$$\alpha_{si} = \alpha_{is} \tag{7}$$

§. IV.

Potenziale di un numero qualunque di corpi elettrizzati.

Conservando le denominazioni del paragrafo precedente, il potenziale dell'elettricità del sistema di coibenti elettrizzati C, e di conduttori K ed H nello stato di equilibrio elettrico, sarà

$$P = \frac{1}{2} \Sigma_s \int_{\sigma_s} V \rho_s d\sigma + \frac{1}{2} \int_C V \rho dS . \tag{1}$$

Ma sopra la superficie σ_s di K_s, abbiamo

$$V = c_s \, , \quad \int_{\sigma_s} \rho_s d\sigma_s = E_s \, ,$$

e sopra H_s:

$$V = 0,$$

onde

$$\Sigma_s \int_{\sigma_s} V\rho_s d\sigma = \Sigma_s c_s E_s . \tag{2}$$

Poichè nello spazio C

$$\Delta^2 w = 4\pi\rho ,$$

sarà

$$\int_C V\rho dS = \frac{1}{4\pi}\int_C V\Delta^2 w dS = \tag{3}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\Sigma_s c_s \int_C v_s \Delta^2 w dS + \frac{1}{4\pi}\int_C w\Delta^2 w dS .$$

Per il teorema di *Green*, abbiamo

$$\int_C v_s \Delta^2 w dS = \int_\sigma v_s \frac{\partial w}{\partial p} d\sigma - \int_\sigma w \frac{\partial v_s}{\partial p} d\sigma , \tag{4}$$

dove σ denota la superficie o l'aggregato di superficie che formano il contorno dello spazio C occupato dai coibenti elettrizzati, e p è la normale a σ diretta verso lo spazio esterno a C.

Ma per lo stesso teorema, essendo $w = o$ sopra tutti i conduttori, $\Delta^2 w = 0$ in tutto lo spazio esterno ai conduttori e ai coibenti, $v_s = 1$ sopra σ_s, ed uguale a zero sopra tutti gli altri conduttori, sarà:

$$\int_\sigma v_s \frac{\partial w}{\partial p} d\sigma + \int_{\sigma_s} \frac{\partial w}{\partial p_s} d\sigma_s = \int_\sigma w \frac{\partial v_s}{\partial p} d\sigma_s .$$

Onde

$$(5) \qquad \int_\sigma v_s \frac{\partial w}{\partial p} d\sigma - \int_\sigma w_s \frac{\partial v_s}{\partial p} d\sigma = - \int_{\sigma_s} \frac{\partial w}{\partial p_s} d\sigma_s = - 4\pi N_s ,$$

denotando N_s la quantità di elettricità libera che si troverebbe sopra il conduttore K_s, se in presenza dei coibenti elettrizzati tutti i conduttori fossero posti in comunicazione colla terra.

Sostituendo il valore (5) nella equazione (4), abbiamo

$$(6) \qquad \int_C v_s \Delta^2 w dS = - 4\pi N_s .$$

Poniamo:

$$(7) \qquad \frac{1}{8\pi}\int_C w \Delta^2 w dS = \frac{1}{2}\int_C w\rho dS = Q ;$$

Q denoterà il potenziale del sistema quando tutti i conduttori siano posti in comunicazione colla terra.

Sostituendo i valori (6) e (7) nella equazione (3), avremo

$$(8) \qquad \frac{1}{2}\int_C V\rho dS = - \frac{1}{2} \Sigma_s c_s N_s + Q ,$$

e ponendo nella equazione (1) i valori (2) e (8), si otterrà

$$(9) \qquad P = \frac{1}{2} \Sigma_s c_s (E_s - N_s) + Q .$$

Se nella equazione (9) sostituiamo i valori di $E_s - N_s$ tratti dalla (3) del paragrafo precedente, osservando la (5) dello stesso paragrafo, avremo

$$(10) \qquad P = \frac{1}{2} \Sigma_{si} \gamma_{si} c_s c_i + Q ,$$

e se sostituendo invece i valori di c_s tratti dalla (6) del paragrafo precedente rammentiamo la (7) dello stesso paragrafo, otterremo

$$(11) \qquad P = \frac{1}{2} \Sigma_{si} \alpha_{si} (E_s - N_s)(E_i - N_i) + Q .$$

Quando non vi sono coibenti elettrizzati si ha

$$Q = 0\,, \quad N_i = 0\,,$$

onde le equazioni (10) e (11) divengono

$$P = \frac{1}{2}\,\Sigma_{si}\gamma_{si}c_s c_i\,, \tag{12}$$

$$P = \frac{1}{2}\,\Sigma_{si}\alpha_{si}E_s E_i\,. \tag{13}$$

Confrontando l'equazioni (11) e (13) si deduce il seguente teorema:

Il potenziale di un sistema di coibenti elettrizzati e di conduttori in parte isolati e carichi di elettricità e in parte in comunicazione colla terra, è uguale al potenziale che si avrebbe per lo stesso sistema quando tutti i conduttori fossero in comunicazione colla terra, più il potenziale del sistema dei soli conduttori, quando le cariche dei conduttori isolati fossero diminuite delle quantità di elettricità libera che rimarrebbero sopra i medesimi se in presenza dei coibenti elettrizzati si ponessero tutti in comunicazione colla terra.

Supponendo fissi i corpi coibenti elettrizzati, e mobili liberamente i conduttori, se n è il numero di questi, le quantità che determineranno la configurazione del sistema, che chiameremo le coordinate, saranno $6n$, e se non vi sono coibenti elettrizzati saranno $6\,n - 1$. Esprimendo la forza viva T per le coordinate e per le loro derivate prime rapporto al tempo, e il potenziale P per le coordinate, dall' equazione di *Hamilton*:

$$\delta\int_0^t (T + P)\,dt = 0\,,$$

si dedurranno l' equazioni del moto del sistema, che saranno tante quante sono le coordinate.

La variazione δP si deduce dalla equazione (9), osservando che le quantità E_s non variano colle coordinate, e abbiamo

$$\delta P = \frac{1}{2}\,\Sigma_s(E_s - N_s)\,\delta c_s - \frac{1}{2}\,\Sigma_s c_s \delta N_s + \delta Q\,. \tag{14}$$

Dalla equazione (3) del §. III, si deduce

$$0 = \Sigma_i \gamma_{si} \delta c_i + \Sigma_i c_i \delta \gamma_{si} + \delta N_s \,.$$

Moltiplicando per c_s, dando ad s tutti i valori da 0 ad n, e sommando, si ottiene

(15) $$0 = \Sigma_i (E_i - N_i)\, \delta c_i + \Sigma_s \Sigma_i c_s c_i \delta \gamma_{si} + \Sigma_s c_s \delta N_s \,.$$

Sottraendo la equazione (15) moltiplicata per $\frac{1}{2}$, dalla (14), si ha

(16) $$\delta P = -\frac{1}{2} \Sigma_s \Sigma_i c_s c_i \delta \gamma_{si} - \Sigma_s c_s \delta N_s + \delta Q \,,$$

e se non vi sono corpi coibenti elettrizzati

(17) $$\delta P = -\frac{1}{2} \Sigma_s \Sigma_i c_s c_i \delta \gamma_{si} \,.$$

§. V.

Distribuzione della elettricità sopra una sfera conduttrice.

Sia O il centro di una sfera conduttrice σ immersa in uno spazio coibente, R il suo raggio, U la funzione potenziale delle forze elettriche, le quali emanano da punti fissi situati nello spazio esterno alla sfera, E la massa di elettricità libera che si trova sopra la sfera; e la funzione potenziale della elettricità distribuita sopra la medesima nello stato di equilibrio sia V_e nello spazio esterno S_e, e V_i nello spazio interno S_i.

In tutto lo spazio S_i sarà

$$V_i = c - U \,,$$

dove c denota una costante. Se denotiamo con V_e' e V_i' ciò che divengono V_e e V_i rispettivamente, quando si fa una trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto alla sfera σ, e denotiamo con r la distanza di un punto dal centro O, e con r' la distanza da O della imagine di quel punto, per modo cioè che sia

$$r' = \frac{R^2}{r} \,,$$

per il teorema 2° del §. XIX del cap. I., la funzione W che, nello spazio S_i imagine di S_e, è espressa da

$$W_i = \frac{RV_e'}{r'} \ ,$$

e nello spazio S_e imagine di S_i, è espressa da

$$W_e = \frac{RV_i'}{r'} \ ,$$

sarà funzione potenziale della elettricità distribuita sopra la sfera σ che è imagine di sè stessa, colla densità

$$\rho' = \rho \ ,$$

cioè della elettricità che ha in S_e la funzione potenziale V_e e in S_i la funzione potenziale V_i. Dunque sarà

$$W_e = V_e \ , \quad W_i = V_i \ ,$$

ossia

$$(1) \qquad V_e = \frac{R}{r}\left\{c - U\left(\frac{R^2}{r}\right)\right\} \ ,$$

$$(2) \qquad V_i = c - U(r) \ .$$

La densità ρ sarà data dalla equazione

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right)_R - \left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_R = 4\pi\rho \ .$$

Ma, denotando con $U'(r)$ la derivata di U rispetto al raggio vettore r, abbiamo

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial r}\right)_R = U'(R) - \frac{c - U(R)}{R} \ ,$$

$$\left(\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)_R = - U'(R) \ ;$$

onde

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left(2U'(R) - \frac{c - U(R)}{R}\right). \tag{3}$$

Se moltiplichiamo la equazione (3) per $d\sigma$, integriamo, estendendo la integrazione a tutta la sfera σ, ed osserviamo che per il teorema di *Green*

$$\int_\sigma U'(R)\, d\sigma = 0,$$

e non essendo nello spazio S_i punti dai quali emanano forze elettriche, dal teorema 1.° del §. XXI del Cap. I, si deduce

$$\int_\sigma U(R) d\sigma = 4\pi R^2 U(0),$$

avremo

$$c = U(0) - \frac{E}{R}. \tag{4}$$

Se la sfera è posta in comunicazione colla terra, sarà

$$c = 0,$$

e quindi l'equazioni (1), (2) e (3) diverranno

$$V_e = -\frac{R}{r}\, U\left(\frac{R^2}{r}\right), \tag{5}$$

$$V_i = -U(r), \tag{6}$$

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left(2U'(R) + \frac{U(R)}{R}\right), \tag{7}$$

e dalla (4) per la massa della elettricità che rimarrà sopra la sfera si ricaverà

$$E = RU(0), \tag{8}$$

ed abbiamo il seguente teorema:

Se una sfera conduttrice si trova nel campo di forze elettriche, le quali hanno una funzione potenziale U, la quantità di elettricità che rimarrà sopra la medesima dopo che è stata in comunicazione colla terra, sarà uguale al valore della funzione potenziale U nel suo centro moltiplicato per il raggio della sfera.

Facendo la comunicazione colla terra per mezzo di un filo conduttore sottilissimo e lunghissimo, in guisa che l'azione sopra la sfera della elettricità che si distribuisce sul filo e sulla parte della terra più vicina non abbia influenza apprezzabile sopra la elettricità dalla sfera, tolto il filo rimarrà sopra la sfera la massa di elettricità libera data dalla equazione (8), e se togliamo la sfera dal campo delle forze elettriche che hanno la funzione potenziale U, e la portiamo in uno spazio coibente in cui non agiscono forze elettriche, sopra la sfera si distribuirà la massa E in modo uniforme e quindi colla densità

$$\rho = \frac{E}{4\pi R^2} = \frac{U(0)}{4\pi R} . \tag{9}$$

Se, quando la sfera conduttrice è nel campo delle forze elettriche di funzione potenziale U, invece di farla comunicare colla terra, la facessimo comunicare mediante il solito filo sottilissimo con un conduttore nel quale fosse $U=\beta$, avremmo nella equazione (3)

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\left(2U'(R) - \frac{\beta - U(R)}{R}\right),$$

e quindi la massa di elettricità libera E', sarebbe

$$E' = RU(0) - \beta R .$$

Se la ponessimo in comunicazione colla terra, la massa di elettricità libera sarebbe

$$E = RU(0) .$$

Onde

$$\beta = \frac{E - E'}{R}, \tag{10}$$

ed abbiamo il seguente teorema:

Se una sfera conduttrice è posta nel campo di forze elettriche qualunque, e sopra di essa, quando è in comunicazione con un conduttore in cui la funzione potenziale è uguale a β, la massa di elettricità libera è uguale ad E′, e quando si pone in comunicazione colla terra la massa di elettricità libera è uguale ad E, la differenza delle due masse E′ ed E divisa per il raggio della sfera sarà uguale a β.

Quando le forze elettriche emanano da un solo punto e dello spazio S_e, ed in e è concentrata una massa di elettricità negativa uguale alla unità, denotando con r_{em} la distanza di e da un punto qualunque m, con r_e ed r le distanze rispettive dei punti e ed m dal centro O, e con ψ l' angolo che i raggi vettori r_e ed r fanno tra loro, avremo

$$U = \frac{1}{\sqrt{r_e^2 + r^2 - 2rr_e\cos\psi}} .$$

Quindi denotando la funzione potenziale della elettricità della sfera nello spazio S_e con G_e e nello spazio S_i con G_i, dall' equazioni (1) e (2) avremo

$$G_i = c - \frac{1}{r_{em}}, \tag{11}$$

$$G_e = \frac{R}{r}\left(c - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r^2} + r_e^2 - \frac{2R^2 r_e}{r}\cos\psi}}\right) = \frac{Rc}{r} - \frac{R}{r_e\sqrt{\left(\frac{R^2}{r_e}\right)^2 + r^2 - 2\frac{R^2}{r_e}r\cos\psi}},$$

e quindi se il punto e' è l' imagine di e, cioè se

$$r_{e'} = \frac{R^2}{r_e},$$

ed $r_{e'm}$ è la distanza di e' da m, avremo

$$G_e = \frac{Rc}{r} - \frac{R}{r_e}\frac{1}{r_{e'm}} . \tag{12}$$

Dalla (3) si ricava per la densità

$$\rho = \frac{r_e^2 - R^2}{4\pi\, R r^3_{em}} - \frac{c}{4\pi R}, \tag{13}$$

e dalla (4) per il valore della costante

$$c = \frac{1}{r_e} - \frac{E}{R}. \tag{14}$$

Dalla equazione (13) si deduce che la densità è uguale a zero sopra la circonferenza s della sfera σ, la quale ha i suoi punti distanti dal punto e di una lunghezza

$$l = \sqrt[3]{\frac{r_e^2 - R^2}{c}}$$

e che la densità è positiva nella più vicina e negativa nella più lontana dal punto e, delle due parti nelle quali rimane divisa la sfera σ dalla linea s.

Se la sfera è in comunicazione colla terra sarà $c = 0$, e quindi l'equazioni (11), (12) e (13) diverranno

$$\begin{gathered} G_i = -\frac{1}{r_{em}}, \quad G_e = -\frac{R}{r_e}\frac{1}{r_{e'm}} \\ \rho = \frac{r_e^2 - R^2}{4\pi R r^3_{em}}, \end{gathered} \tag{15}$$

e la (14) darà

$$E = \frac{R}{r_e}; \tag{16}$$

ed abbiamo il seguente teorema:

La elettricità indotta sopra una sfera σ in comunicazione colla terra da un punto e in cui è concentrata una massa di elettricità negativa uguale alla unità, esercita nello spazio esterno a σ, un azione uguale a quella del punto e' imagine di e, in cui è concentrata una massa di elettricità positiva uguale al rapporto del raggio della sfera al raggio vettore del punto e.

La funzione potenziale dell' elettricità del punto e e della sfera nello spazio S_e esterno a questa sarà

$$V = \frac{1}{r_{em}} + \frac{Rc}{r} - \frac{R}{r_e}\frac{1}{r_{e'm}}. \tag{17}$$

Prendendo l'origine nel centro C, per asse delle z la retta che va da da C ad e, e chiamando t la distanza di m da questa retta, avremo anche

$$(18)\quad V=\frac{1}{\sqrt{t^2+(z-r_e)^2}}+\frac{Rc}{\sqrt{t^2+z^2}}-\frac{R}{r_e}\frac{1}{\sqrt{t^2+(z-r_{e'})^2}}$$

Le linee di forza, per ciò che abbiamo dimostrato nel §. XXIII. del Cap. I., saranno nei piani che passano per la retta che va dal punto C al punto e, e in questi avranno per equazione

$$\int t\left(\frac{\partial V}{\partial z}\,dt-\frac{\partial V}{\partial t}\,dz\right)=\text{cost}\,.$$

Sostituendo i valori delle derivate di V ricavati dalla (18), osservando la identità

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+(z-a)^2}}\right)dt-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+(z-a)^2}}\right)dz\right)=d\left(\frac{z-a}{\sqrt{t^2+(z-a)^2}}\right)$$

per equazione delle linee di forza avremo

$$(19)\quad \frac{z-r_e}{\sqrt{t^2+(z-r_e)^2}}+\frac{Rcz}{\sqrt{t^2+z^2}}-\frac{R}{r_e}\frac{z-r_{e'}}{\sqrt{t^2+(z-r_{e'})^2}}=\text{cost}\,.$$

Denotando con ψ_e e $\psi_{e'}$ gli angoli che fanno colla retta che va da C al punto e, le rette che vanno rispettivamente dai punti e ed e' al punto m, avremo anche per equazione delle linee di forza

$$(20)\qquad \cos\psi_e+Rc\cos\psi-\frac{R}{r_e}\,R\cos\psi_{e'}=\text{cost}\,.$$

Quando i punti d'onde emanano le forze che hanno la funzione potenziale U, sono situati nello spazio S_i coibente interno alla superficie sferica conduttrice σ, la funzione potenziale V della elettricità in equilibrio sopra σ sarà nello spazio S_e

$$(21)\qquad V_e=\frac{cR}{r}-U(r)\,,$$

e nello spazio S_i si otterrà colla solita trasformazione per raggi vettori reciproci

$$V_i = c - \frac{R}{r} U\left(\frac{R^2}{r}\right). \tag{22}$$

La densità ρ sarà

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(2U'(R) + \frac{c + U(R)}{R}\right). \tag{23}$$

Moltiplicando per $d\sigma$, integrando, estendendo la integrazione a tutta la sfera, ed osservando che per il teorema 1.° del §. XXI. del Cap. I, si ha

$$\int_\sigma U(R) d\sigma = -4\pi RM,$$

dove M è la massa della quale è funzione potenziale U, e si è mutato il segno del secondo membro, perchè, trattandosi di elettricità, alla densità uguale ad uno sopra la sfera corrisponde nello spazio interno la funzione potenziale $-4\pi R$, ed osservando inoltre che per il teorema espresso dalla equazione (17) del §. XI, del Cap. I, essendo $\frac{\partial}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial r}$ e $\Delta^2 U = 4\pi\rho$, abbiamo

$$\int_\sigma U'(R) d\sigma = 4\pi M,$$

e quindi si ottiene per la determinazione della costante c

$$E = -cR - M. \tag{24}$$

§. VI.

Coordinate piane ortogonali e isoterme.

Se le figure dei corpi conduttori, e quelle formate dai punti ugualmente elettrizzati dei corpi coibenti, sono cilindri indefiniti cogli assi paralleli a z, oppure sono di rivoluzione intorno all'asse z, converrà prendere per sistema triplo di superficie ortogonali, nel primo caso i piani perpendicolari all'asse z, e due sistemi di superficie cilindriche, che hanno z per asse e due sistemi di linee ortogonali e isoterme per basi; nel secondo: piani che passano per z, e due sistemi di superficie di rivoluzione intorno a z, generate da due sistemi di linee piane ortogonali e isoterme.

I sistemi doppi di linee piane ortogonali e isoterme sono in numero infinito, e se ne ottengono l'equazioni prendendo una funzione reale di una variabile complessa $x+iy$, ed uguagliando la parte reale ad una costante u, e la parte imaginaria ad una costante v; oppure prendendo $x+iy$ funzione reale di una variabile complessa $u+iv$, ed uguagliando ad x e ad y rispettivamente la parte reale e la imaginaria. Se prendiamo $x+iy$ uguale a una funzione monodroma di $u+iv$, ad ogni sistema di valori di u e di v corrisponderà un sol sistema di valori di x e di y, e quindi un sol punto nel piano; se oltre ad essere monodroma la funzione è anche periodica, ed ha un periodo ip, ad ogni sistema di valori di x e di y corrisponderà un sistema $(u, v+np)$, dove n è un numero intero, e affinchè questo sistema sia unico basterà prendere per v i soli valori compresi tra 0 e p. Analoga restrizione dovrebbe farsi per u se il periodo fosse reale. Pertanto potremo prendere $x+iy$ funzione iperbolica di $u+iv$, ed avremo due sistemi doppi di coordinate piane isoterme ortogonali.

1.° Sia

$$x+iy=a\cosh(u+iv),$$

e quindi:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x&=a\cosh u\cos v,\\ y&=a\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v. \end{aligned}$$

Dividendo per $\cosh u$ la prima, e per $\mathrm{senh}\,u$ la seconda, inalzando a quadrato e sommando, si otterrà

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2\cosh^2 u}+\frac{y^2}{a^2\,\mathrm{senh}^2 u}=1.$$

Dividendo per $\cos v$ la prima, e per $\operatorname{sen} v$ la seconda, inalzando a quadrato e sottraendo, avremo

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 v} = 1 .$$

Quindi le equazioni

$$u = \cos t , \quad v = \cos t ,$$

rappresentano due sistemi di ellissi e di iperbole omofocali.

Denotando con ds l'elemento lineare nel piano, avremo

$$(4) \qquad ds^2 = a^2 (\cosh^2 u - \cos^2 v)(du^2 + dv^2) ,$$

e quindi se V è funzione indipendente da z, sarà

$$(5) \qquad \Delta^2 V = \frac{1}{a(\cosh^2 u - \cos^2 v)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right)$$

2.° Sia

$$(6) \qquad x + iy = - a \coth \frac{1}{2}(u + iv) .$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore del secondo membro per $\operatorname{senh} \frac{1}{2}(u - iv)$, ed uguagliando tra loro le parti reali e le imaginarie, avremo

$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= - \frac{a \operatorname{senh} u}{\cosh u - \cos v} \\ y &= \frac{a \operatorname{sen} v}{\cosh u - \cos v} \end{aligned}$$

Mutando nella equazione (6) i in $-i$ e moltiplicandola per la equazione così ottenuta, abbiamo

$$(8) \qquad x^2 + y^2 = a^2 \frac{\cosh u + \cos v}{\cosh u - \cos v} ,$$

ed osservando le (7) se ne deduce

$$(9) \qquad x^2 + \left(y - \frac{a}{\tang v}\right)^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sen} v}\right)^2,$$

$$(10) \qquad \left(x + \frac{a}{\tangh u}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{senh} u}\right)^2.$$

Dunque l'equazioni $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$, rappresentano due sistemi di circonferenze che s'intersecano ortogonalmente.

La (9) è sodisfatta dai valori

$$x = \pm a, \quad y = 0,$$

quindi tutte le circonferenze (v) passano per i due punti A e A' dell' asse delle x, che si trovano alla distanza a dall' origine, e l'asse delle x è asse radicale di questo sistema di circonferenze.

La equazione (10) è sodisfatta dai valori $y = 0$, $x = \pm ai$, quindi le circonferenze del sistema (u) passano per due punti imaginari dell'asse delle y, il quale ne sarà l'asse radicale.

Denotando con R il raggio, e con d l' ordinata del centro di una circonferenza (v), abbiamo

$$\mathrm{R} \operatorname{sen} v = a, \quad d \tang v = a,$$

dunque v è l'angolo iscritto nel segmento di circolo (v) che ha per corda AA'.

La equazione (8) puo scriversi

$$(11) \qquad (x - a)^2 + y^2 = 2a^2 \frac{\cosh u + \operatorname{senh} u}{\cosh u - \cos v},$$

o anche

$$(12) \qquad (x + a)^2 + y^2 = 2a^2 \frac{\cosh u - \operatorname{senh} u}{\cosh u - \cos v},$$

e dividendo la equazione (11) per la (12), si ottiene

$$(13) \qquad e^u = \sqrt{\frac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2}},$$

dunque u è il logaritmo neperiano del rapporto delle distanze di un punto qualunque di una circonferenza (u) dai due punti A ed A'.

I punti A ed A' si dicono *poli*, e le coordinate u, v si chiamano *dipolari*.

Se l'asse di rivoluzione è l'asse delle x, e φ è l'angolo che il piano meridiano variabile fa con un meridiano fisso, e x_1, x_2, x_3 sono le coordinate cartesiane di un punto dello spazio, sarà

$$x_1 = x\,, \quad x_2 = y\cos\varphi\,, \quad x_3 = y\,\mathrm{sen}\varphi\,.$$

Se invece l'asse di rivoluzione è l'asse delle y, sarà

$$x_1 = x\cos\varphi\,, \quad x_2 = x\,\mathrm{sen}\varphi\,, \quad x_3 = y$$

quindi la distanza r di due punti di coordinate (x, y, φ), (x', y', φ'), nel primo caso verrà data dalla equazione:

$$(14) \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 4yy' \,\mathrm{sen}^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}\,,$$

e nel secondo caso dalla equazione

$$(15) \qquad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 4xx' \,\mathrm{sen}^2 \frac{(\varphi - \varphi')}{2}\,.$$

Dall'equazione (6) si ha

$$x - x' + i(y - y') = a \frac{\mathrm{senh}\,\dfrac{u - u' + i(v - v')}{2}}{\mathrm{senh}\,\dfrac{u + iv}{2}\,\mathrm{senh}\,\dfrac{u' + iv'}{2}}\,,$$

$$x - x' - i(y - y') = a \frac{\mathrm{senh}\,\dfrac{u - u' - i(v - v')}{2}}{\mathrm{senh}\,\dfrac{u - iv}{2}\,\mathrm{senh}\,\dfrac{u' - iv'}{2}}\,;$$

e moltiplicando una per l'altra queste equazioni, si ottiene

$$(16) \quad (x - x')^2 + (y - y')^2 = 2a^2 \frac{\cosh(u - u') - \cos(v - v')}{(\cosh u - \cos v)(\cosh u' - \cos v')}\,.$$

Chiamiamo col Sig. *C. Neumann parametro* del punto (u, v), e denotiamo con $\xi_{u, v}$ la radice quadrata del prodotto delle distanze di questo punto da A e da A'.

Moltiplicando l'equazioni (11) e (12) una per l'altra, avremo

$$\xi_{u,v} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh u - \cos v}} \tag{17}$$

e quindi

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \frac{\xi^2_{u, v}\, \xi^2_{u', v'}}{\xi^2_{u-u', v-v'}}, \tag{18}$$

sostituendo il valore (18) nella (14) e nella (15), quando l'asse di rivoluzione è l'asse delle x, otterremo

$$r^2 = \frac{\xi^2_{u, v}\, \xi^2_{u', v'}}{\xi^2_{u-u', v-v'}}\left(1 + 4\, \xi_{u-u', v-v'} \operatorname{sen} v \operatorname{sen} v' \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}\right), \tag{19}$$

e quando l'asse di rivoluzione è l'asse delle y,

$$r^2 = \frac{\xi^2_{u, v}\, \xi^2_{u', v'}}{\xi^2_{u-u', v-v'}}\left(1 + 4\, \xi_{u-u', v-v'} \operatorname{senh} u \operatorname{senh} u' \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}\right). \tag{20}$$

Se l'asse di rivoluzione è l'asse delle x, l'equazioni $u = \alpha$ rappresentano sfere, le quali hanno per coordinate del centro

$$y = 0\,,\; x = -\frac{a}{\operatorname{tangh} \alpha},$$

e dall'equazioni (7), abbiamo

$$v = 0\,,\; \frac{1}{\operatorname{tangh} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tangh} \frac{1}{2} u}$$

ossia:

$$v = 0\,,\; u = 2\alpha\,,$$

e quindi le coordinate del centro di una sfera $u = \alpha$, sono $v = 0$, $v = 2\alpha$.

Le coordinate cartesiane del centro della circonferenza $v=\beta$, sono

$$x=0\,,\ y=\frac{a}{\tang\beta}\,,$$

onde

$$u=0\,,\ \frac{\operatorname{sen} v}{1-\cos v}=\frac{1}{\tang\frac{1}{2}v}=\frac{1}{\tang\beta}\,.$$

Dunque le coordinate dipolari del centro di una circonferenza $v=\beta$, sono

$$u=0\,,\ v=2\beta\,.$$

Se l'asse di rivoluzione è l'asse x, e i punti $(u,\ v,\ \varphi)$, $(u',\ v',\ \varphi)$ sono reciproci rispetto a una sfera (α), ed r, r' denotano le rispettive distanze dei medesimi dal centro; avremo dall'equazione (19)

$$(21)\qquad r=\frac{\xi_{u,v}\,\xi_{2\alpha,0}}{\xi_{u-2\alpha,v}}\,,\ r'=\frac{\xi_{u',v'}\,\xi_{2\alpha,0}}{\xi_{u'-2\alpha,v'}}\,.$$

Ma denotando con R il raggio della sfera, dalla equazione (17), si ha

$$\xi_{2\alpha,0}=\frac{a}{\operatorname{senh}\alpha}=\mathrm{R}\,,$$

e moltiplicando una per l'altra l'equazioni (21), si ottiene l'equazione

$$rr'=\frac{\xi_{u,v}\,\xi_{u',v'}}{\xi_{u-2\alpha,v}\,\xi_{u'-2\alpha,v'}}\,\mathrm{R}^2=\mathrm{R}^2\,,$$

la quale sarà sodisfatta per qualunque valore di u e di v, quando sia

$$(22)\qquad u+u'=2\alpha\,,\ v'=v\,.$$

Dunque il punto reciproco ad uno dato essendo unico, abbiamo il teorema: i punti reciproci rispetto a una sfera α hanno uguali le coordinate v e φ, ed uguale a 2α la somma delle coordinate u.

Siano $(\alpha, \beta, \varphi')$ le coordinate di un punto a della sfera (α), (u, v, φ) le coordinate di un punto m; $(2\alpha - u, v, \varphi)$ saranno quelle del punto m' reciproco ad m rispetto alla sfera (α). Sia r la distanza di m da a, ed r' la distanza da a di m', avremo dalla equazione (19)

$$r^2 = \frac{\xi^2_{u,v}\,\xi^2_{\alpha,\beta}}{\xi^2_{\alpha-u,\beta-v}}\left(1 + \frac{1}{a^2}\,\xi^2_{\alpha-u,\beta-v}\,\mathrm{sen}v\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')\right),$$

$$r'^2 = \frac{\xi^2_{2\alpha-u,v}\,\xi^2_{\alpha,\beta}}{\xi^2_{\alpha-u,\beta-v}}\left(1 + \frac{1}{a^2}\,\xi^2_{\alpha-u,\beta-v}\,\mathrm{sen}v\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')\right),$$

onde

$$(23) \qquad \frac{r}{r'} = \frac{\xi_{u,v}}{\xi_{2\alpha-u,v}},$$

ed abbiamo il teorema seguente:

Le distanze di due punti m ed m' reciproci rispetto ad una sfera, da un punto qualunque di questa, stanno tra loro come i rispettivi parametri dei punti m ed m'.

Se l'asse di rivoluzione è l'asse delle y, e i due punti (u, v, φ), (u', v', φ) sono reciproci rispetto alla superficie $v = \beta$, avremo con calcolo analogo dall'equazione (20)

$$r = \frac{\xi_{u,v}\,\xi_{0,2\beta}}{\xi_{u,v-2\beta}} = \mathrm{R}\,\frac{\xi_{u,v}}{\xi_{u,v-2\beta}}, \quad r' = \frac{\xi_{u',v'}\,\xi_{0,2\beta}}{\xi_{u',v'-2\beta}} = \mathrm{R}\,\frac{\xi_{u',v'}}{\xi_{u',v'-2\beta}},$$

onde

$$rr' = \mathrm{R}^2 = \mathrm{R}^2\,\frac{\xi_{u,v}\,\xi_{u',v'}}{\xi_{u,v-2\beta}\,\xi_{u',v'-2\beta}}$$

che sarà sodisfatta per qualunque valore di u e di v, quando sia

$$(24) \qquad u' = u, \quad v + v' = 2\beta.$$

Dalla (20) si deduce come precedentemente la equazione

$$(25) \qquad \frac{r'}{r} = \frac{\xi_{u,2\beta-v}}{\xi_{u,v}},$$

e quindi anche rispetto alla superficie (β) le distanze dei punti reciproci dai punti della superficie stanno tra loro come i rispettivi parametri.

Dalla equazione (6), abbiamo

$$dx + idy = \frac{a(du + idv)}{2\operatorname{senh}^2 \frac{(u + iv)}{2}},$$

e mutando i in $-i$,

$$dx - idy = \frac{a(du - idv)}{2\operatorname{senh}^2 \frac{(u - iv)}{2}},$$

e moltiplicando una per l'altra queste equazioni

$$(26) \quad dx^2 + dy^2 = \frac{a^2}{(\cosh u - \cos v)^2}\left(du^2 + dv^2\right) = \frac{\xi^4}{4a^2}\left(du^2 + dv^2\right).$$

ove per brevità si è scritto ξ in luogo di ξ_{uv}.

Quan o l'asse di rivoluzione è l'asse delle x, l'elemento lineare ds nello spazio è dato dalla equazione

$$ds^2 = \Sigma_n dx_n^2 = dx^2 + dy^2 + y^2 d\varphi^2;$$

e sostituendo il valore (26)

$$(27) \qquad ds^2 = \frac{\xi^4}{4a^2}\left(du^2 + dv^2 + \operatorname{sen}^2 v \, d\varphi^2\right).$$

Quindi nella equazione (8) del §. II. del Cap. I, avremo

$$(28) \qquad H_1 = H_2 = \frac{\xi^2}{2a}, \quad H_3 = \frac{\xi^2}{2a}\operatorname{sen} v,$$

e in conseguenza

$$(29) \qquad \Delta^2 V = \frac{4a^2}{\xi^6}\left(\frac{\partial \xi^2 \frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u} + \frac{\partial \xi^2 \operatorname{sen} v \frac{\partial V}{\partial v}}{\operatorname{sen} v \, \partial v} + \frac{\xi^2}{\operatorname{sen}^2 v}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right).$$

Quando l'asse di rivoluzione è l'asse delle y, l'elemento lineare nello spazio è dato dalla equazione

$$(30) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + x^2 d\varphi^2 = \frac{\xi^4}{4a^2}\left(du^2 + dv^2 + \operatorname{senh}^2 u \, d\varphi^2\right),$$

e quindi in modo analogo, otterremo:

$$(31) \quad \Delta^2 V = \frac{4a^2}{\xi^6}\left(\frac{\partial \xi^2 \operatorname{senh} u \frac{\partial V}{\partial u}}{\operatorname{senh} u \, \partial u} + \frac{\partial \xi^2 \frac{\partial V}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\xi^2}{\operatorname{senh}^2 u}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right).$$

Le sfere del sistema (u) non possono nè intersecarsi nè esser tangenti tra loro, ma incontrano tutte l' asse delle x tra i due poli A ed A'; quindi col diminuire della distanza $2a$ di questi punti tutte le sfere si avvicinano tra loro, e per $a = 0$ divengono tutte tangenti. Ma quando $a = 0$ anche u e v divengono zero, e tutte le formule dimostrate fin qui risultano indeterminate. Affinchè sia possibile di trattare anche il caso in cui due sfere del sistema (u) siano tangenti tra loro, bisognerà prendere per coordinate invece di u e v altre due quantità che non si annullino quando $a = 0$.

Prendiamo

$$\mu = \frac{\operatorname{senh}\frac{u}{2}}{a}, \quad \nu = \frac{\operatorname{sen}\frac{v}{2}}{a};$$

μ sarà la inversa della lunghezza delle tangenti alla sfera di raggio a, col centro all' origine, condotte dal punto dove la sfera (u) incontra l' asse delle x nella porzione non compresa tra i poli; e ν sarà la inversa della distanza di un polo da uno dei punti d'intersezione della sfera (v) col piano normale ad AA' che passa per l'origine.

Allorchè $a = 0$, le quantità μ diverranno uguali alle inverse dei diametri delle sfere (u), le quali saranno tutte tangenti tra loro, e le quantità ν diverranno uguali alle inverse dei diametri delle circonferenze generatrici delle superficie v; e avremo

$$(32) \qquad \begin{aligned} \cosh\frac{u}{2} &= \sqrt{1 + a^2\mu^2} = 1 \\ \cos\frac{v}{2} &= \sqrt{1 - a^2\nu^2} = 1 \end{aligned}$$

$$(33) \qquad \begin{aligned} \frac{\operatorname{senh}\frac{u+u'}{2}}{a} &= \frac{\operatorname{senh}\frac{u}{2}\cosh\frac{u'}{2}}{a} + \frac{\operatorname{senh}\frac{u'}{2}\cosh\frac{u}{2}}{a} = \mu + \mu' \\ \operatorname{sen}\frac{v+v'}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{v}{2}\cos\frac{v'}{2}}{a} + \frac{\operatorname{sen}\frac{v'}{2}\cos\frac{v}{2}}{a} = \nu + \nu'. \end{aligned}$$

La equazione (6) diverrà

$$(34) \qquad x + iy = -\frac{1}{\mu + \nu i} = -\frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} + \frac{\nu i}{\mu^2 + \nu^2};$$

onde

$$x = -\frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2},$$

$$y = \frac{\nu}{\mu^2 + \nu^2}.$$

Dalla equazione (34) si ricava

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \frac{(\mu - \mu')^2 + (\nu - \nu')^2}{(\mu^2 + \nu^2)(\mu'^2 + \nu'^2)}.$$

Quindi per la distanza r di due punti di coordinate (μ, ν, φ) (μ', ν', φ'), dalle equazioni (14) e (15) abbiamo, quando l'asse di rivoluzione è l'asse delle x

$$r^2 = \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)\ (\mu'^2 + \nu'^2)} \left\{(\mu - \mu')^2 + (\nu - \nu')^2 + 4\,\nu\nu' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\right\},$$

e quando l'asse di rivoluzione è l'asse delle y

$$r^2 = \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)\ (\mu'^2 + \nu'^2)} \left\{(\mu - \mu')^2 + (\nu - \nu')^2 + 4\mu\mu' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\right\}.$$

La distanza di un punto dall'origine è in ambedue i casi

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}.$$

§. VII.

Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra due sfere conduttrici in presenza una dell'altra.

Siano C e C' i centri di due sfere esterne una all'altra, le quali abbiano rispettivamente i raggi R ed R', e la distanza CC' dei centri sia uguale a q. Conduciamo un piano per la retta CC', e l'asse radicale OO′ delle due circonferenze secondo le quali questo piano interseca le due sfere. Dal punto O in cui l'asse radicale incontra la retta CC′ si conducano le tangenti alle due circonferenze, la lunghezza delle quali denoteremo con a, e si descriva col centro in O e con un raggio uguale ad a una circonferenza che incontrerà la retta CC′ in due punti A ed A′. Prendiamo questi due punti per poli di un sistema di coordinate dipolari, nel caso che l'asse di rivoluzione sia la retta AA′, e conserviamo tutte le notazioni del paragrafo precedente.

L'equazioni delle due sfere saranno

$$u = \alpha, \quad u = \alpha' ,$$

ed essendo le due sfere da parti opposte dell'asse delle y, α ed α' avranno segno contrario; supporremo α positiva e quindi α' negativa.

Per determinare le quantità α, α' ed a in funzione dei raggi R ed R′ e della distanza q dei centri, osserviamo le relazioni,

$$\mathrm{R}\,\mathrm{senh}\alpha = a\,, \quad \mathrm{R}'\,\mathrm{senh}\alpha' = -a\,,$$
$$\mathrm{R}\cosh\alpha + \mathrm{R}'\cosh\alpha' = q\,,$$

dalle quali si deduce

$$\mathrm{senh}\alpha = \frac{a}{\mathrm{R}}\,, \quad \mathrm{senh}\,\alpha' = -\frac{a}{\mathrm{R}'}\,,$$

$$a = -\frac{q\,\mathrm{senh}\alpha\;\mathrm{senh}\alpha'}{\mathrm{senh}\,(\alpha - \alpha')} = \frac{\sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 - q^2)^2 - 4\mathrm{R}^2\,\mathrm{R}'^2}}{2q}\,.$$

Le due sfere (α) ed (α') siano conduttrici, isolate e cariche rispettivamente delle masse di elettricità E ed E′. Denotiamo la funzione potenziale della elettricità nello stato di equilibrio con V_e nello spazio S_e esterno, con V_i e V_i' rispettivamente negli spazi S_i e S_i' interni alle due sfere. Per ciò che abbiamo dimostrato nel §. III, dovrà essere

$$\mathrm{V}_i = c\,, \quad \mathrm{V}_i' = c'\,,$$
$$\mathrm{V}_e = c\mathrm{Q} + c'\mathrm{Q}'\,, \tag{1}$$

dove c e c' denotano due costanti, Q è la funzione potenziale che sopra la sfera (α) è uguale alla unità e sopra (α') è uguale a zero, Q' è quella che sopra (α') è uguale alla unità e sopra (α) è uguale a zero, e la elettricità della quale sono funzioni potenziali Q e Q' è distribuita soltanto sopra le superficie σ e σ' delle due sfere (α) ed (α'), e quindi in tutto lo spazio S_e dev'essere

$$(2) \qquad \Delta^2 Q = 0\,, \quad \Delta^2 Q' = 0\,.$$

Se denotiamo con r_s la distanza di un punto e dello spazio S_e da un punto m_s, che si trova sopra una delle porzioni dell'asse x interna ad S_i o ad S_i' sarà

$$(3) \qquad \Delta^2 \frac{1}{r_s} = 0\,.$$

Siano $(b_s\,, 0)$ le coordinate dipolari di m_s, avremo dalla equazione (19) del §. VI.

$$(4) \qquad \frac{1}{r_s} = \frac{\xi_{u-b_s\,,\,v} \operatorname{senh} \dfrac{b_s}{2}}{\xi_{u\,,\,v}}\,,$$

e a cagione della equazione (3), la prima delle (2) sarà sodisfatta prendendo $Q = a_s \dfrac{\xi_{u-b_s\,,\,v}}{\xi_{u\,,\,v}}$, o anche

$$(5) \qquad Q = \sum_0^\infty a_s \frac{\xi_{u-b_s\,,\,v}}{\xi_{u\,,\,v}}$$

quando la serie (5) e le serie delle derivate dei suoi termini siano convergenti in ugual grado.

Determiniamo ora i coefficienti a_s e le coordinate b_s, in modo che sia $Q = 1$ per $u = \alpha$, e $Q = 0$ per $u = \alpha'$.

La (5) tralasciando per brevità l'indice v delle ξ può scriversi sotto le due forme:

$$Q = a_0 \frac{\xi_{u-b_0}}{\xi_u} + \frac{1}{\xi_u} \sum_1^\infty \left(a_{2s-1}\, \xi_{u-b_{2s-1}} + a_{2s}\, \xi_{u-b_{2s}} \right)\,,$$

$$Q = \frac{1}{\xi_u} \sum_0^\infty \left(a_{2s}\, \xi_{u-b_{2s}} + a_{2s+1}\, \xi_{u-b_{2s+1}} \right)\,.$$

Dalla prima si vede che ponendo $u=\alpha$, avremo $Q=1$ quando siano sodisfatte l' equazioni

(6) $$a_0=1\ ,\ a_{2s-1}=-a_{2s}\ ,$$

(7) $$b_0=2\alpha\ ,\ b_{2s-1}+b_{2s}=2\alpha\ .$$

Dalla seconda risulta $Q=0$ per $u=\alpha'$ quando siano verificate l'equazioni

(8) $$a_{2s+1}=-a_{2s}\ ,$$

(9) $$b_{2s}+b_{2s+1}=2\alpha'\ .$$

L' equazioni (6) e (8) danno

(10) $$a_{2s}=1\ ,\ a_{2s+1}=-1\ ,$$

e le equazioni (7) e (9), ponendo

(11) $$\omega=\alpha-\alpha'\ ,$$

danno

(12) $$b_{2s}=2s\omega+2\alpha\ ,\ b_{2s+1}=-2s\omega\ .$$

Sostituendo i valori (10) e (12) nella (5), avremo

(13) $$Q=\frac{1}{\xi_u}\sum_0^{\infty}\xi_{u-2\alpha-2s\omega}-\frac{1}{\xi_u}\sum\xi_{u+2s\omega}\ .$$

Essendo α positivo e α' negativo, ω è una quantità positiva, quindi $b_{2s}>\alpha$, e i punti $(b_{2s}, 0)$ sono tutti interni alla sfera (α), ed essendo $-b_{2s-1}>-\alpha'$, i punti $(b_{2s-1}, 0)$ sono interni alla sfera (α'). Quindi nello spazio S_e, i termini della serie (13) si conservano sempre funzioni finite e continue. Osserviamo ancora che dalle equazioni (9) e (10) risulta che i punti m_{2s+1}, ed m_{2s} sono reciproci rispetto alla sfera (α') e i punti m_{2s}, m_{2s-1} sono reciproci rispetto alla sfera (α). Quindi i punti m_s si ottengono nel modo seguente: si prende il centro m_0 della sfera (α), si costruisce il punto m_1 reciproco ad m_0 rispetto alla sfera (α'), poi il punto m_2 reciproco ad m_1 rispetto alla sfera (α), e così di seguito.

Ponendo mente alla equazione (4), la serie Q può scriversi anche sotto la forma

$$Q = a \sum_0^\infty \frac{1}{r_{2s} \operatorname{senh}(\alpha + s\omega)} - a \sum_1^\infty \frac{1}{r_{2s-1} \operatorname{senh} s\omega}. \tag{14}$$

Il rapporto di un termine al precedente nella prima serie è

$$\frac{r_{2s}}{r_{2s+2}} \frac{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega + \omega)}.$$

Poichè i punti m_{2s} si avvicinano indefinitamente tra loro e al polo col crescere di s, il limite del primo fattore converge alla unità; per il secondo fattore abbiamo

$$\lim_{s=\infty} \frac{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega + \omega)} = \lim_{s=\infty} \frac{1}{\cosh\omega + \operatorname{senh}\omega \coth(s\omega + \alpha)},$$

onde

$$\lim_{s=\infty} \frac{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}{\operatorname{senh}(\alpha + (s+1)\omega)} = \frac{1}{\cosh\omega + \operatorname{senh}\omega} = e^{-\omega} < 1,$$

perchè $\omega > 0$. Ugualmente si trova per la seconda serie il limite del rapporto di un termine al precedente minore della unità. Dunque ambedue le serie sono convergenti in ugual grado, e tali pure sono le serie delle derivate, quindi la somma di queste serie ha tutte le proprietà caratteristiche della funzione potenziale Q, ed è uguale a Q.

Mutando α in α' si otterrà Q' ed avremo

$$Q' = \frac{1}{\xi_u} \sum_0^\infty \xi_{u-2\alpha'+2s\omega} - \frac{1}{\xi_u} \sum_1^\infty \xi_{u-2s\omega}, \tag{15}$$

e quindi

$$Q' = a \sum_0^\infty \frac{1}{r_{2s} \operatorname{senh}(s\omega - \alpha')} - a \sum_1^\infty \frac{1}{r'_{2s-1} \operatorname{senh} s\omega} \tag{16}$$

$$V_e = \frac{c}{\xi_u}\left(\sum_0^\infty \xi_{u-2\alpha'-2s\omega} - \sum_1^\infty \xi_{u+2s\omega}\right) + \frac{c'}{\xi_u}\left(\sum_0^\infty \xi_{u-2\alpha'+2s\omega} - \sum_1^\infty \xi_{u-2s\omega}\right). \tag{17}$$

e anche

$$(18)\qquad V_e = ca\left\{\sum_0^\infty \frac{1}{r_{2s}\operatorname{senh}(s\omega+\alpha)} - \sum_1^\infty \frac{1}{r_{2s-1}\operatorname{senh}s\omega}\right\}$$

$$+ c'a\left\{\sum_0^\infty \frac{1}{r'_{2s}\operatorname{senh}(s\omega-\alpha')} - \sum_1^\infty \frac{1}{r'_{2s-1}\operatorname{senh}s\omega}\right\}.$$

Per determinare le costanti c e c', abbiamo dimostrato nel §. IV di questo Capitolo, che basta determinare le quantità γ_{11}, γ_{12}, γ_{22} definite dalle equazioni

$$\gamma_{11} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial Q}{\partial p}\,d\sigma,$$

$$(19)\qquad \gamma_{12} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial Q'}{\partial p}\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'} \frac{\partial Q}{\partial p'}\,d\sigma',$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'} \frac{\partial Q'}{\partial p'}\,d\sigma',$$

nelle quali σ e σ' denotano rispettivamente le superficie delle sfere (α) ed (α'), e p e p' le rispettive normali dirette verso l'esterno.

Ora i punti $(2s\omega+2\alpha, 0)$ e $(2s\omega, 0)$ sono nello spazio interno alla sfera σ, e i punti $(-2s\omega+2\alpha', 0)$ $(-2s\omega, 0)$ sono nello spazio interno a σ', quindi sostituendo nelle equazioni (19) i valori(14) e (16) di Q e di Q', ed applicando i teoremi espressi dall' equazioni (15) e (16) del §. XI del Cap. I, otterremo

$$\gamma_{11} = -a\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega+\alpha)},$$

$$(20)\qquad \gamma_{12} = a\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}s\omega},$$

$$\gamma_{22} = -a\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega-\alpha')}.$$

Tra le masse E ed E′ dell' elettricità libera, che si trovano sopra le due sfere σ e σ', e le costanti c e c', abbiamo le relazioni

$$(21) \qquad \begin{aligned} E &= c\gamma_{11} + c'\gamma_{12} , \\ E' &= c\gamma_{12} + c'\gamma_{22} , \end{aligned}$$

onde ponendo

$$D = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 ,$$

si ricavano i valori delle costanti

$$(22) \qquad c = \frac{E\gamma_{22} - E'\gamma_{12}}{D} , c' = \frac{E'\gamma_{11} - E\gamma_{12}}{D} .$$

Dall' equazioni (18) e (21) si deduce il seguente teorema:

Date due masse E ed E′ di elettricità in equilibrio sopra due sfere isolate σ e σ', si può distribuire la massa E in una serie di punti interni alla sfera σ e situati sulla retta che unisce i centri, e la massa E′ in una serie di punti della stessa retta interni alla sfera σ', in modo che nello spazio esterno ad ambedue le sfere, l' azione esercitata da questi punti sia uguale a quella esercitata dalle sfere.

Se le due superficie sferiche σ e σ' si pongono in comunicazione per mezzo di un filo conduttore sottilissimo, sarà

$$c = c' ,$$

e seguiteranno a valere le stesse formule. Sottraendo una dall' altra l' equazioni (21), e sostituendo nel risultato i valori (20), avremo

$$(23) \qquad E' - E = ca\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega + \alpha)} - \sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')}\right)$$

$$= ca \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} + (2s + 1)\frac{\omega}{2}\right)} .$$

Poniamo

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}(z + \frac{2s+1}{2}\omega)} .$$

Questa funzione monodroma ha evidentemente per infiniti tutte e sole le quantità della forma

$$(2m+1)\frac{\omega}{2} + n\pi i ,$$

dove m ed n sono numeri reali, interi qualunque, ed ha due periodi, uno reale uguale ad ω, ed uno imaginario uguale a $2\pi i$.

Ora se prendiamo

$$q = e^{-\frac{\pi^2}{\omega}}$$

$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{s^2} ,$$

$$\sqrt{\frac{kK}{2\pi}} = 2\sqrt[4]{q}\sum_{0}^{\infty} q^{s(s+1)} ,$$

dalla teorica delle funzioni ellittiche abbiamo che prendendo per modulo il valore di k ricavato in funzione di q da queste equazioni, K sarà l'integrale completo di prima specie, l'integrale completo complementare K′ sarà dato dalla equazione

$$K' = \frac{\pi K}{\omega} ,$$

e la funzione ellittica di modulo k

$$\varphi(z) = \operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega} = \frac{\operatorname{sn}\frac{2Kz}{\omega}}{\operatorname{cn}\frac{2Kz}{\omega}} ,$$

sodisfarà all'equazioni

$$\varphi(z+\omega)=\operatorname{tg}\left(\frac{2Kz}{\omega}+2K\right)=\operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega},$$

$$\varphi(z+2\pi i)=\operatorname{tg}\left(\frac{2Kz}{\omega}+4K'i\right)=\operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega},$$

ed avrà gli stessi infiniti della funzione $F(z, \omega)$.

Dunque per un noto teorema di analisi, le due funzioni F e φ non potranno differire altro che per un fattore indipendente da z, ed avremo

$$F(z, \omega)=C\operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega}.$$

Moltiplicando ambedue i membri di questa equazione per $\operatorname{senh}\left(z-\frac{\omega}{2}\right)$ e passando al limite per $z=\frac{\omega}{2}$, si ottiene

$$1=C\lim_{z=\frac{\omega}{2}}\operatorname{senh}\left(z-\frac{\omega}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega}=C\lim_{z=0}\operatorname{senh}z\operatorname{tg}\left(\frac{2Kz}{\omega}+K\right)=$$

$$=\frac{C}{k'}\lim_{z=0}\frac{\operatorname{senh}z\operatorname{cn}\frac{2Kz}{\omega}}{\operatorname{sn}\frac{2Kz}{\omega}}=\frac{C\omega}{2Kk'},$$

onde

$$C=\frac{2k'K}{\omega},$$

$$F(z, \omega)=\frac{2k'K}{\omega}\operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega}.$$

Sostituendo questo valore nella equazione (23), otterremo

$$E'-E=\frac{2cak'K}{\omega}\operatorname{tg}\frac{K(\alpha+\alpha')}{\omega}. \tag{24}$$

Se le due sfere fossero uguali sarebbe

$$\alpha+\alpha'=0,$$

e quindi

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}' .$$

Denotando con ρ la densità della elettricità sopra la superficie σ, e con ρ' quella della superficie σ', osservando che per ciò che abbiamo dimostrato alla fine del §. II. del Cap. I, si ha

$$\frac{\partial}{\partial p} = h_1 \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{\mathrm{H}_1} \frac{\partial}{\partial u} ,$$

e ponendo mente alla equazione (28) del paragrafo precedente, avremo:

$$(25) \qquad \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial p} = \frac{a}{2\pi \xi_\alpha^2} \left(\frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial u} \right)_\alpha , \\ \rho' &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial p'} = \frac{a}{2\pi \xi_{\alpha'}^2} \left(\frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial u} \right)_{\alpha'} . \end{aligned}$$

Consideriamo ora i valori della funzione potenziale e delle densità nei punti della retta che unisce i centri delle due sfere. Nei punti di questa retta che si trovano tra le due sfere abbiamo

$$v = \pi .$$

Sostituendo questo valore nella equazione (17) ed osservando la relazione

$$\frac{\xi_{u',\pi}}{\xi_{u,\pi}} = \frac{\cosh \frac{u}{2}}{\cosh \frac{u'}{2}} ,$$

otterremo

$$(26) \quad \mathrm{V}_e = \cosh \frac{u}{2} \Bigg\{ c \left(\sum_0^\infty \frac{1}{\cosh\left(s\omega + \alpha - \frac{u}{2}\right)} - \sum_1^\infty \frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{2} + s\omega\right)} \right) + c' \left(\sum_0^\infty \frac{1}{\cosh\left(s\omega - \alpha' + \frac{u}{2}\right)} - \sum_1^\infty \frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{2} - s\omega\right)} \right) \Bigg\} .$$

Se i due conduttori sono posti in comunicazione tra loro mediante un filo conduttore sottilissimo, sarà

$$c = c',$$

e quindi

$$(27)\quad V_e = c\left\{1 + \cosh\frac{u}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\left(\frac{\alpha+\alpha'-u}{2}+(2s+1)\frac{\omega}{2}\right)} - \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\left(\frac{u}{2}+s\omega\right)}\right)\right\}.$$

Ora abbiamo

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\left(z+(2s+1)\frac{\omega}{2}\right)} = i\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{senh}\left(z+\frac{\pi i}{2}+(2s+1)\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{2k'Ki}{\omega}\operatorname{tg}\left(\frac{2Kz}{\omega}+K'i\right) = \frac{2k'K}{\omega\operatorname{dn}\frac{2Kz}{\omega}},$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh(z+s\omega)} = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh\left(z-\frac{\omega}{2}+(2s+1)\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{2k'K}{\omega\operatorname{dn}\left(\frac{2Kz}{\omega}-K\right)} = \frac{2K}{\omega}\operatorname{dn}\frac{2Kz}{\omega},$$

e quindi la equazione (27) diviene

$$(28)\quad V_e = c\left\{1 + \frac{2K}{\omega}\cosh\frac{u}{2}\left(\frac{k'}{\operatorname{dn}\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)} - \operatorname{dn}\frac{Ku}{\omega}\right)\right\}.$$

Derivando rispetto ad u, avremo

$$\frac{\partial V_e}{\partial u} = \frac{Kc}{\omega}\operatorname{senh}\frac{u}{2}\left(\frac{k'}{\operatorname{dn}\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)} - \operatorname{dn}\frac{Ku}{\omega}\right)$$

$$-2\frac{ck^2K^2}{\omega^2}\cosh\frac{u}{2}\left(\frac{k'\operatorname{cn}\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)\operatorname{sn}\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)}{\operatorname{dn}^2\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)} - \operatorname{cn}\frac{Ku}{\omega}\operatorname{sn}\frac{Ku}{\omega}\right).$$

Ponendo $u = \alpha$, ed osservando le relazioni

$$\operatorname{dn}\frac{K\alpha'}{\omega} = \operatorname{dn}\left(\frac{K\alpha}{\omega} - K\right) = \frac{k'}{\operatorname{dn}\frac{K\alpha}{\omega}}$$

$$\operatorname{cn}\frac{K\alpha'}{\omega} = \operatorname{cn}\left(\frac{K\alpha}{\omega} - K\right) = \frac{k'\operatorname{sn}\frac{K\alpha}{\omega}}{\operatorname{dn}\frac{K\alpha}{\omega}} \tag{29}$$

$$\operatorname{sn}\frac{K\alpha'}{\omega} = \operatorname{sn}\left(\frac{K\alpha}{\omega} - K\right) = -\frac{\operatorname{cn}\frac{K\alpha}{\omega}}{\operatorname{dn}\frac{K\alpha}{\omega}}$$

si ottiene

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial u}\right)_\alpha = \frac{4ck^2K^2}{\omega^2}\cosh\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\frac{K\alpha}{\omega}\operatorname{cn}\frac{K\alpha}{\omega}.$$

Analogamente ponendo $u = \alpha'$, abbiamo

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial u}\right)_{\alpha'} = \frac{4ck^2K^2}{\omega^2}\cosh\frac{\alpha'}{2}\operatorname{cn}\frac{K\alpha'}{\omega}\operatorname{sn}\frac{K\alpha'}{2}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazioni (25) ed osservando che per $v = \pi$ si ha

$$\xi_\alpha^2 = \frac{a^2}{\cosh^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \xi^2_{\alpha'} = \frac{2a^2}{\cosh^2\frac{\alpha'}{2}},$$

otterremo per le densità nei punti dove le sfere (α) ed (α') incontrano la retta che unisce i centri tra A ed A'

$$\begin{aligned}\rho_\alpha &= \frac{2ck^2K^2}{\pi a\,\omega^2}\cosh^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{cn}\frac{K\alpha}{\omega}\operatorname{sn}\frac{K\alpha}{\omega}, \\ \rho_{\alpha'} &= \frac{2ck^2K^2}{\pi a\omega^2}\cosh^3\frac{\alpha'}{2}\operatorname{cn}\frac{K\alpha'}{\omega}\operatorname{sn}\frac{K\alpha'}{\omega}.\end{aligned} \tag{30}$$

Poichè α ed α' sono di segno contrario, è evidente che anche ρ_α ed ρ_{α}' saranno di segno contrario.

Nei punti della retta che unisce i centri, che si trovano da una stessa parte di ambedue le sfere, abbiamo $v = 0$, e quindi in questi punti la equazione (15) diverrà

$$(31)\quad V_e = \operatorname{senh}\frac{u}{2}\left\{c\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(s\omega + \alpha - \frac{u}{2}\right)} - \sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{2} + s\omega\right)}\right) + \right.$$
$$\left. + c'\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(-s\omega + \alpha' - \frac{u}{2}\right)} - \sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{2} - s\omega\right)}\right)\right\}.$$

Se le sfere sono al solito in comunicazione e quindi $c = c'$, la equazione (31) diverrà

$$V_e = c\left\{1 + \operatorname{senh}\frac{u}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{\alpha + \alpha' - u}{2} + (2s+1)\frac{\omega}{2}\right)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{u}{2} + s\omega\right)}\right)\right\}.$$

Ma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(z + (2s+1)\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{2k'K}{\omega}\operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega},$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}(z + s\omega)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}\left(z - \frac{\omega}{2} + (2s+1)\frac{\omega}{2}\right)} =$$
$$= \frac{2k'K}{\omega}\operatorname{tg}\left(\frac{2Kz}{\omega} - K\right) = -\frac{2K}{\omega\operatorname{tg}\frac{2Kz}{\omega}},$$

quindi

$$(32)\quad V_e = c\left(1 + \frac{2K}{\omega}\operatorname{senh}\frac{u}{2}\left(k'\operatorname{tg}\frac{K}{\omega}(\alpha + \alpha' - u)\right) + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{Ku}{\omega}}\right).$$

Derivando rispetto ad u, abbiamo

$$\frac{\partial V_e}{\partial u}=\frac{Kc}{\omega}\cosh\frac{u}{2}\left(k'\operatorname{tg}\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{Ku}{\omega}}\right)$$

$$-\frac{2K^2c}{\omega^2}\operatorname{senh}\frac{u}{2}\left(k'\frac{\operatorname{dn}\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)}{\operatorname{cn}^3\frac{K}{\omega}(\alpha+\alpha'-u)}+\frac{\operatorname{dn}\frac{Ku}{\omega}}{\operatorname{sn}^2\frac{Ku}{\omega}}\right)$$

Ponendo $u=\alpha$ ed osservando le relazioni (29), si ottiene

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial u}\right)_\alpha=-\frac{4K^2c}{\omega^2}\operatorname{senh}\frac{\alpha}{2}\frac{\operatorname{dn}\frac{K\alpha}{\omega}}{\operatorname{sn}^2\frac{K\alpha}{\omega}},$$

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial u}\right)_{\alpha'}=-\frac{4K^2c}{\omega^2}\operatorname{senh}\frac{\alpha'}{2}\frac{\operatorname{dn}\frac{K\alpha'}{\omega}}{\operatorname{sn}^2\frac{K\alpha'}{\omega}},$$

e quindi dall' equazioni (25) per le densità nei punti dove le sfere (α) ed (α') incontrano la retta che unisce i centri nei punti più lontani dall'origine, abbiamo

$$(33)\qquad \begin{aligned}\rho_\alpha&=-\frac{cK^2}{\pi a\omega^2}\operatorname{senh}^3\frac{\alpha}{2}\frac{\operatorname{dn}\frac{K\alpha}{\omega}}{\operatorname{sn}^2\frac{K\alpha}{\omega}},\\ \rho_{\alpha'}&=-\frac{cK^2}{\pi a\omega^2}\operatorname{senh}^3\frac{\alpha'}{2}\frac{\operatorname{dn}\frac{K\alpha'}{\omega}}{\operatorname{sn}^2\frac{K\alpha'}{\omega}}.\end{aligned}$$

Anche in questi punti abbiamo le densità di segno contrario, ed anche di segno contrario le densità nei due punti nei quali una medesima sfera incontra la retta che unisce i centri.

Se una delle due sfere, per esempio σ', è in comunicazione colla terra, sarà

$$c' = 0\,,$$

e quindi dalla equazione (17) avremo

$$\mathrm{V}_e = \frac{c}{\xi_u}\left(\sum_0^\infty \xi_{u-2\alpha-2s\omega} - \sum_1^\infty \xi_{u+2s\omega}\right), \tag{34}$$

e per la costante c dalla prima dell'equazioni (21)

$$c = \frac{\mathrm{E}}{\gamma_{11}}\,,$$

e per la elettricità libera E' che si troverà sopra σ', dalla seconda delle medesime equazioni

$$\mathrm{E}' = \frac{\mathrm{E}\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\,.$$

Ponendo

$$\alpha' = 0\,,$$

la sfera σ' si riduce al piano indefinito condotto per il punto C normalmente alla retta AA', cioè ad un piano indefinito distante dal centro della sfera σ di una lunghezza uguale a $-\dfrac{a}{\operatorname{tangh}\alpha}$.

In questo caso essendo $\omega = \alpha$, la equazione (34) diviene

$$\mathrm{V}_e = \frac{\mathrm{E}}{\sum\limits_1^\infty \operatorname{senh} s\omega} \sum_1^\infty \frac{\xi_{u-2s\alpha} - \xi_{u+2s\alpha}}{\xi_u} \tag{35}$$

Passiamo ora alla determinazione delle linee di forza nel caso generale. Esse saranno in piani che passano per la retta che unisce i centri delle due sfere, e in questi avranno per equazione

$$\int y\left(\frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial y}\,dx\right) = \text{cost.}$$

Denotando con $(x_s\,,\,0)$ le coordinate cartesiane dei punti di coordinate dipolari $(b_s, 0)$, e con $(x_s', 0)$ quelle dei punti di coordinate dipolari $(b_s', 0)$, abbiamo dalla (18)

$$V_s = c\left(\sum_0^\infty \frac{a}{\operatorname{senh}(s\omega+\alpha)\sqrt{y^2+(x-x_{2s})^2}} - \sum_0^\infty \frac{a}{\operatorname{senh} s\omega\sqrt{y^2+(x-x_{2s+1})^2}}\right)$$
$$+c'\left(\sum_0^\infty \frac{a}{\operatorname{senh}(s\omega-\alpha')\sqrt{y^2+(x-x'_{2s})^2}} - \sum_0^\infty \frac{a}{\operatorname{senh} s\omega\sqrt{y^2+(x-x'_{2s+1})^2}}\right)$$

Sostituendo nell'equazione precedente, integrando e denotando con ψ_s, ψ_s' gli angoli che fanno rispettivamente colla linea dei centri i raggi vettori che vanno dai punti $(b_s, 0)$ e $(b_s', 0)$ al punto (x, y) abbiamo per equazione delle linee di forza

$$c\left(\sum \frac{\cos\psi_{2s}}{\operatorname{senh}(s\omega+\alpha)} - \sum \frac{\cos\psi_{2s+1}}{\operatorname{senh} s\omega}\right)$$
$$+c'\left(\sum \frac{\cos\psi'_{2s}}{\operatorname{senh}(s\omega-\alpha')} - \sum \frac{\cos\psi'_{2s+1}}{\operatorname{senh} s\omega}\right) = \text{cost.}$$

Determiniamo ora nello spazio S_e esterno ad ambedue le sfere σ e σ', la funzione potenziale G_e della elettricità indotta sopra le due sfere in comunicazione colla terra mediante il solito filo sottilissimo e lunghissimo, da un punto m di coordinate (u', v', φ') situato in S_e, nel quale sia concentrata una massa di elettricità negativa uguale alla unità.

Denotiamo con ε il punto e dello spazio S_e, cui si riferisce il valore di G_e, quando e si trova sopra σ, e con ε' quando si trova sopra σ', con u, v, φ le sue coordinate, con $r_{m\varepsilon}$, $r_{m\varepsilon'}$ rispettivamente le distanze di m da ε e da ε', e con G_ε, $G_{\varepsilon'}$ i rispettivi valori di G_e nei medesimi punti.

La funzione potenziale G_e dovrà sodisfare alle due equazioni

$$(36) \qquad G_\varepsilon + \frac{1}{r_{m\varepsilon}} = 0, \quad G_{\varepsilon'} + \frac{1}{r_{m\varepsilon'}} = 0,$$

e godere le altre proprietà caratteristiche delle funzioni potenziali delle masse a due dimensioni distese sopra σ e σ'.

Cerchiamo anche in questo caso di determinare due serie di punti elettrizzati interni alle due sfere, che abbiano in S_e la funzione potenziale uguale a G_e.

Siano: m_0, m_1, m_2, ... una serie di punti interni a σ, ed m_0', m_1', m'_2, ... una serie di punti interni a σ', denotiamo con $r_{s\epsilon}$, $r'_{s\epsilon}$ le rispettive distanze dei punti m_s ed m'_s dal punto qualunque ϵ dello spazio S_ϵ, e prendiamo

$$G_\epsilon = -\Sigma\left(\frac{A_s}{r_{s\epsilon}} + \frac{A'_s}{r'_{s\epsilon}}\right). \tag{37}$$

È chiaro che l' equazioni (36) saranno sodisfatte quando siano verificate le seguenti

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{r_{0\epsilon}} &= \frac{1}{r_{m\epsilon}}, \quad \frac{A_{s+1}}{r_{s+1,\epsilon}} + \frac{A'_s}{r'_{s,\epsilon}} = 0 \\ \frac{A'_0}{r'_{0\epsilon'}} &= \frac{1}{r_{m\epsilon'}}, \quad \frac{A'_{s+1}}{r'_{s+1,\epsilon'}} + \frac{A_s}{r_{s,\epsilon'}} = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Se i punti: m_0, m_1, m_2, ... sono rispettivamente reciproci ai punti: m, m'_0, m'_1, ... rispetto alla sfera σ, e i punti: m'_0, m'_1, m'_2, ... sono reciproci ai punti: m, m_0, m_1, ... rispetto alla sfera σ', dal teorema espresso dalla equazione (23) del paragrafo precedente, avremo

$$\begin{aligned} \frac{r_{0\epsilon}}{r_{m\epsilon}} &= \frac{\xi_{u_0,v'}}{\xi_{u',v'}}, \quad \frac{r_{s+1,\epsilon}}{r'_{s\epsilon}} = \frac{\xi_{u_{s+1},v'}}{\xi_{u'_s,v'}}, \\ \frac{r'_{0\epsilon}}{r_{m\epsilon'}} &= \frac{\xi_{u'_0,v'}}{\xi_{u',v'}}, \quad \frac{r'_{s+1,\epsilon'}}{r_{s\epsilon'}} = \frac{\xi_{u'_{s+1},v'}}{\xi_{u_s,v'}}, \end{aligned} \tag{39}$$

ove le coordinate u_s ed u_s', sono determinate dall'equazioni

$$\begin{aligned} u' + u_0 &= 2\alpha, \quad u_{s+1} + u'_s = 2\alpha, \\ u' + u'_0 &= 2\alpha', \quad u'_{s+1} + u_s = 2\alpha', \end{aligned} \tag{40}$$

e quindi

$$\begin{aligned} u_{2s} &= 2s\omega + 2\alpha - u', \quad u_{2s+1} = 2s\omega + u', \\ u'_{2s} &= -2s\omega + 2\alpha - u', \quad u'_{2s+1} = -2s\omega + u'. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori (39) nell'equazioni (38) si ricava

$$A_0 = \frac{\xi_{u_0,v'}}{\xi_{u',v'}}, \quad A_s = (-1)^s \frac{\xi_{u_s,v'}}{\xi_{u',v'}},$$

$$A_0' = \frac{\xi_{u_0',v'}}{\xi_{u',v'}}, \quad A_s' = (-1)^s \frac{\xi_{u'_s,v'}}{\xi_{u',v}},$$

e quindi

$$G_{e} = -\sum_{0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{\xi_{u_s,v'}}{\xi_{u'v'}\,r_{s0}} - \sum_{0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{\xi_{u'_s,v'}}{\xi_{u'v'}} .$$

La densità ρ e ρ' dell'elettricità rispettivamente indotte sopra le sfere σ e σ', saranno date dall'equazioni

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_e}{\partial p} , \quad \rho' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G_e}{\partial p'} ,$$

dove p e p' sono le rispettive normali alle due superficie σ e σ' dirette verso gli spazi interni alle medesime.

Moltiplicando la prima equazione per $d\sigma$, la seconda per $d\sigma'$, integrando ed estendendo le integrazioni rispettivamente a tutte le sfere σ e σ', avremo per le rispettive masse E ed E′ di elettricità libera che si troveranno sopra σ e σ'

$$(42) \qquad \begin{aligned} E &= \sum_{0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{\xi_{u_s,v'}}{\xi_{u',v'}} , \\ E' &= \sum_{0}^{\infty}(-1)^{s}\frac{\xi_{u'_s,v'}}{\xi_{u',v'}} , \end{aligned}$$

cioè queste masse saranno uguali ai valori che nel punto m prendono le funzioni Q e Q′ precedentemente determinate. Poichè queste funzioni sono uguali alla unità sopra una delle due sfere, e uguali a zero sopra l'altra e all'infinito, e non hanno massimi nè minimi nello spazio S_e, avranno in m valori positivi minori dell'unità.

Dunque la massa di elettricità indotta sopra ciascuna sfera sarà di segno contrario alla massa inducente e minore della medesima.

Dall' equazioni (41) e (42) si deduce il seguente teorema:

Dato un punto m elettrizzato e due sfere conduttrici in comunicazione colla terra, si possono determinare due serie infinite di punti elettrizzati situati negli spazi interni alle due sfere sopra la circonferenza che passa per i poli e per il punto m, i quali esercitano nello spazio esterno ad ambedue le sfere un'azione uguale a quella che nello stesso spazio esercita l'elettricità indotta sopra le medesime sfere dal punto m. La massa totale dell'elettricità di una di queste serie di punti è uguale alla massa della elettricità indotta sopra la sfera dentro la quale questi punti sono situati.

Se le sfere σ e σ' invece di essere in comunicazione colla terra fossero isolate e cariche rispettivamente delle masse elettriche M ed M', la funzione potenziale V della elettricità che si troverebbe in equilibrio sopra le medesime, sotto l'azione del punto m, nello spazio S_e sarebbe

$$V_e = cQ + c'Q' + G_e\,,$$

e le costanti c e c' sarebbero determinate dall'equazioni

$$(44)\qquad \begin{aligned} M &= c\gamma_{11} + c'\gamma_{12} + E\,,\\ M' &= c\gamma_{12} + c'\gamma_{22} + E'\,. \end{aligned}$$

La funzione potenziale W del punto m e della elettricità delle sfere sarebbe

$$(45)\qquad W = \frac{1}{r_{me}} + cQ + c'Q' + G_e\,.$$

§. VIII.

Determinazione dell'azione reciproca di due sfere conduttrici elettrizzate.

Due sfere solide conduttrici σ e σ' cariche delle masse elettriche E ed E', e perfettamente libere, sotto l'azione reciproca della elettricità distribuita in equilibrio sopra le loro superficie, acquisteranno un movimento, durante il quale varierà il potenziale elettrico, ma se supponiamo che i due conduttori non offrano resistenza al moto dei fluidi elettrici, e siano istantanee le variazioni necessarie affinchè la elettricità conservi continuamente lo stato di equilibrio, il potenziale elettrico P avrà sempre la espressione (12) data nel §. IV, e potremo applicare il principio di *Hamilton* per ottenere l' equazioni del moto delle due sfere. Poichè il movimento del centro di gravità è conservato, trattandosi di forze newtoniane, potremo supporre fisso questo centro, e la configurazione del sistema dipenderà soltanto dalla distanza q dei due centri. Denotando con M ed M' le masse di σ e di σ', e con (x, y, z) le coordinate cartesiane del centro di σ quando l'origine è nel centro di σ', avremo

$$\frac{MM'}{M+M'}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial q}\frac{x}{q},$$

$$\frac{MM'}{M+M'}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial q}\frac{y}{q},$$

$$\frac{MM'}{M+M'}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial q}\frac{z}{q}.$$

Dalle precedenti equazioni risulta che l'azione reciproca delle due sfere è diretta secondo la retta che unisce i centri, e la sua intensità è espressa da $\frac{\partial P}{\partial q}$.

Se la sfera σ' è fissa, al fattore $\frac{MM'}{M+M'}$ deve sostituirsi il fattore M.

Dalle equazioni (12) e (17) del §. IV, avremo

$$P=\frac{1}{2}\left(c^2\gamma_{11}+2cc'\gamma_{12}+c'^2\gamma_{22}\right). \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q}=-\frac{1}{2}\left(c^2\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial q}+2cc'\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial q}+c'^2\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial q}\right). \tag{2}$$

Nel paragrafo precedente abbiamo trovato

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{11} = -a \sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega + \alpha)}, \\
(3) \qquad &\gamma_{12} = a \sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{senh} s\omega}, \\
&\gamma_{22} = -a \sum_0^\infty \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')},
\end{aligned}
$$

dove α ed α' sono funzioni di q determinate dall'equazioni

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
&R \operatorname{senh}\alpha = a, \quad R' \operatorname{senh}\alpha' = -a, \\
&R \cosh\alpha + R' \cosh\alpha' = q.
\end{aligned}
$$

Da queste si deduce osservando che $\omega = \alpha - \alpha'$

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha}{\partial q} = \frac{\operatorname{senh}\alpha \cosh\alpha'}{a \operatorname{senh}\omega}, \quad \frac{\partial\alpha'}{\partial q} = \frac{\operatorname{senh}\alpha' \cosh\alpha}{a \operatorname{senh}\omega}, \\
&\frac{\partial\omega}{\partial q} = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial a}{\partial q} = \frac{\cosh\alpha \cosh\alpha'}{\operatorname{senh}\omega}.
\end{aligned}
$$

Derivando le equazioni (3) rispetto a q, osservando le (5) e sostituendo i valori delle derivate di $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ nell'equazione (2), abbiamo

$$
\begin{aligned}
(6) \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{2} \sum_1^\infty \Big\{ & c^2 \left(\frac{\cosh\alpha \cosh\alpha'}{\operatorname{senh}\omega} - \left(s + \frac{\operatorname{senh}\alpha \cosh\alpha'}{\operatorname{senh}\omega} \right) \coth(s\omega + \alpha) \right) \cdot \\
& \cdot \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega + \alpha)} - 2cc' \left(\frac{\cos\alpha \cosh\alpha'}{\operatorname{senh}\omega} - s \coth s\omega \right) \frac{1}{\operatorname{senh} s\omega} + \\
& + c'^2 \left(\frac{\cosh\alpha \cosh\alpha'}{\operatorname{senh}\omega} - \left(s - \frac{\operatorname{senh}\alpha' \cosh\alpha}{\operatorname{senh}\omega} \right) \coth(s\omega - \alpha') \right) \frac{1}{\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')} \Big\}.
\end{aligned}
$$

Dall'equazioni (4) si ricava anche

$$
\begin{aligned}
\operatorname{senh}\alpha &= \frac{a}{R}, \quad \cosh\alpha = \frac{q^2 + R^2 - R'^2}{2RR'}, \\
\operatorname{senh}\alpha' &= -\frac{a}{R'}, \quad \cosh\alpha' = \frac{q^2 + R'^2 - R^2}{2RR'}, \\
\operatorname{senh}\omega &= \frac{aq}{RR'}, \quad \cosh\omega = \frac{q^2 - R^2 - R'^2}{2RR'}.
\end{aligned}
$$

Quindi l'equazioni (3) divengono

$$\gamma_{11} = -R\left(1 + \frac{RR'}{q^2 - R'^2} + \frac{R^2R'^2}{(q^2 - R'^2)^2 - q^2R^2} + \dots\right),$$

$$(7) \quad \gamma_{12} = \frac{RR'}{q}\left(1 + \frac{RR'}{q^2 - R^2 - R'^2} + \frac{R^2R'^2}{(q^2 - R^2 - R'^2)^2 - R^2R'^2} + \dots\right),$$

$$\gamma_{22} = -R'\left(1 + \frac{RR'}{q^2 - R^2} + \frac{R^2R'^2}{(q^2 - R^2)^2 - q^2R'^2} + \dots\right).$$

Onde

$$(8) \quad \frac{\partial P}{\partial q} = RR'\left\{c^2qR\left(\frac{1}{(q^2 - R'^2)^2} + \frac{RR'(2(q^2 - R'^2) - R^2)}{((q^2 - R'^2)^2 - q^2R^2)^2} + \dots\right) - \right.$$
$$- \frac{cc'}{q^2}\left(1 + \frac{RR'(3q^2 - R^2 - R'^2)}{(q^2 - R^2 - R'^2)^2} + \dots\right) +$$
$$\left. + c'^2qR'\left(\frac{1}{(q^2 - R^2)^2} + \frac{RR'(2(q^2 - R^2) - R'^2)}{((q^2 - R^2)^2 - q^2R'^2)^2} + \dots\right)\right\}.$$

Sostituendo i valori (7) nell' equazioni (22) del paragrafo precedente otterremo i valori di c e di c'. Se $\frac{R}{q}$ e $\frac{R'}{q}$ sono di tal grandezza che si possano trascurare le loro potenze superiori alla terza, poichè in $\frac{\partial P}{\partial q}$ i coefficienti di c^2 e di c'^2 sono già di terzo e quello di cc' è già di 2° ordine rispetto a queste grandezze, si potranno trascurare nei valori di c e di c' le potenze superiori alla prima, ed otterremo

$$c = -\frac{E}{R} - \frac{E'}{q}, \quad c' = -\frac{E'}{R'} - \frac{E}{q},$$

e quindi

$$\frac{\partial P}{\partial q} = -RR'\left(\frac{c^2R + c'^2R'}{q^3} - \frac{cc'}{q^2}\right)$$
$$= \frac{EE'}{q^2},$$

ed abbiamo il seguente teorema:

Se i rapporti dei raggi di due sfere elettrizzate alla distanza dei centri sono così piccoli che se ne possano trascurare le potenze superiori alla terza, le due sfere si attraggono o si respingono come se tutta la elettricità fosse concentrata nei loro centri.

Quando $\alpha'=0$, la sfera σ' diviene il piano indefinito che passa per l'origine ed è normale all'asse della x. Denotando con g la distanza della sfera σ da questo piano, avremo

$$(9)\qquad g=\mathrm{R}\cosh\alpha\,,\quad \operatorname{senh}\alpha=\frac{a}{\mathrm{R}}=\frac{\sqrt{g^2-\mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}}\,.$$

Se il piano indefinito è in comunicazione colla terra avremo $c'=0$, e quindi

$$(10)\qquad c=\frac{\mathrm{E}}{\gamma_{11}}\,,$$

$$(11)\qquad \frac{\partial\mathrm{P}}{\partial g}=-\frac{c^2}{2}\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial g}\,,$$

e γ_{11} diverrà

$$\gamma_{11}=-a\sum_1^{\infty}\frac{1}{\operatorname{senh}s\alpha}=-\mathrm{R}\left(1+\frac{\mathrm{R}}{2g}+\frac{\mathrm{R}^2}{4g^2-\mathrm{R}^2}+\frac{\mathrm{R}^3}{4g(2g^2-\mathrm{R}^2)}+\ldots\right).$$

Derivando rapporto a g, e sostituendo nella equazione (11), abbiamo

$$(12)\qquad \frac{\partial\mathrm{P}}{\partial g}=-\frac{c^2\mathrm{R}^2}{2}\left(\frac{1}{2g^2}+\frac{8g\mathrm{R}}{(4g^2-\mathrm{R}^2)^2}+\frac{6g^2-\mathrm{R}^2}{4g^2(2g^2-\mathrm{R}^2)^2}+\ldots\right).$$

Se il rapporto $\frac{\mathrm{R}}{g}$ è così piccolo che se ne possano trascurare le potenze superiori alla terza, avremo

$$(13)\qquad \frac{\partial\mathrm{P}}{\partial g}=-\frac{c^2\mathrm{R}^2}{4g^2}\left(1+\frac{\mathrm{R}}{g}\right)$$

e dalla equazione (10)

$$c=-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1-\frac{\mathrm{R}}{2g}\right)$$

e quindi

$$c^3 = \frac{E^2}{R^2}\left(1 - \frac{R}{g}\right),$$

Sostituendo nella (13), otterremo

$$\frac{\partial P}{\partial g} = -\frac{E^2}{4g^2};$$

onde si deduce il seguente teorema:

Se una sfera conduttrice è carica di una massa E di elettricità in equilibrio, in presenza di un piano conduttore indefinito in communicazione colla terra, e il rapporto del raggio della sfera alla distanza del suo centro dal piano è così piccolo che se ne possano trascurare le potenze superiori alla terza, la sfera sarà attratta dal piano come se nel centro fosse concentrata la massa di elettricità $\frac{E}{2}$, e una massa uguale e di segno contrario fosse concentrata nel piede della perpendicolare condotta dal centro della sfera sul piano.

§. IX.

Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra due sfere conduttrici in contatto.

Per trattare il caso in cui le sfere conduttrici elettrizzate σ e σ' sono in contatto, per ciò che abbiamo detto nel §. VI. di questo Capitolo converrà sostituire alle coordinate u e v le altre μ e ν determinate dall'equazioni

$$\mu a = \operatorname{senh}\frac{u}{2}, \quad \nu a = \operatorname{sen}\frac{v}{2},$$

e poi porre $a = 0$. Denotando con β e β' i rispettivi valori algebrici inversi dei diametri delle due sfere σ e σ' e con ω la loro differenza, avremo

$$\frac{\xi_{u_{2s}}}{\xi_u}=\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2\frac{u}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{2s\omega+2\alpha-u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}}=\sqrt{\frac{\mu^2+\nu^2}{(2s\omega+2\beta-\mu)^2+\nu^2}},$$

$$\frac{\xi_{u_{2s-1}}}{\xi_u}=\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2\frac{u}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{2s\omega+u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}}=\sqrt{\frac{\mu^2+\nu^2}{(2s\omega+\mu)^2+\nu^2}},$$

$$\frac{\xi_{u'_{2s}}}{\xi_u}=\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2\frac{u}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{2s\omega-2\alpha'+u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}}=\sqrt{\frac{\mu^2+\nu^2}{(2s\omega-2\beta'+\mu)^2+\nu^2}},$$

$$\frac{\xi_{u'_{2s-1}}}{\xi_u}=\sqrt{\frac{\operatorname{senh}^2\frac{u}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}{\operatorname{senh}^2\left(\frac{2s\omega-u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\frac{v}{2}}}=\sqrt{\frac{\mu^2+\nu^2}{(2s\omega-\mu)^2+\nu^2}},$$

Sostituendo questi valori nella equazione (17) del paragrafo precedente e ponendovi $c'=c$, avremo per la funzione potenziale V_e della massa M di elettricità in equilibrio sopra le due sfere in contatto

$$(1)\quad V_e=c\left[1+\sqrt{\mu^2+\nu^2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(\beta+\beta'-\mu+(2s+1)\,\omega)^2+\nu^2}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(\mu+2s\omega)^2+\nu^2}}\right)\right].$$

Facendo analoghe sostituzioni nell'equazioni (20) e (21) del paragrafo precedente, avremo per le quantità E ed E′ di elettricità che si troveranno rispettivamente sopra le sfere σ e σ'

$$E=\frac{c}{2}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{s\beta-s\beta'}-\frac{1}{s\beta-(s-1)\beta'}\right)=\frac{c\beta'}{2(\beta-\beta')}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s(s\beta-(s-1)\beta')},$$

$$E'=\frac{c}{2}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{s\beta-s\beta'}-\frac{1}{(s-1)\beta-s\beta'}\right)=-\frac{c\beta}{2(\beta-\beta')}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{s((s-1)\beta-s\beta')}.$$

Denotando con R ed R′ i raggi rispettivi delle due sfere, sarà

$$\beta = \frac{1}{2R}, \quad \beta' = -\frac{1}{2R'},$$

onde

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} E &= -\frac{cR^2R'}{R+R'} \sum_1^\infty \frac{1}{s(sR'+(s-1)R)}, \\ E' &= -\frac{cR'^2R}{R+R'} \sum_1^\infty \frac{1}{s(sR+(s-1)R')}. \end{aligned} \right.$$

Tra E ed E′ abbiamo anche le relazioni

$$(3) \qquad E + E' = M,$$

$$E - E' = -\frac{c}{2}\left(\sum_0^\infty \frac{1}{\beta + s\omega} + \sum_1^\infty \frac{1}{\beta - s\omega}\right) = -\frac{c}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta + s\omega},$$

onde per una formula nota

$$(4) \qquad E - E' = -\frac{c\pi}{2(\beta-\beta')}\cot\frac{\pi\beta}{\beta-\beta'} = -\frac{\pi cRR'}{(R+R')}\cot\frac{\pi R'}{R+R'}.$$

Se le due sfere sono uguali, avremo

$$R = R', \quad E = \frac{M}{2},$$

e quindi

$$M = cR\sum_1^\infty \frac{1}{2s(2s-1)} = cR\log 2.$$

Ponendo $c = 1$, abbiamo per la capacità delle due sfere in contatto

$$(5) \qquad \gamma = R\log 2.$$

Se la sfera σ' è molto piccola rispetto a σ, cioè se $\frac{R'}{R}$

è una quantità molto piccola, in guisa che se ne possano trascurare le potenze superiori rispetto alle inferiori, avremo

$$(6) \qquad E' = -\frac{cR'^2}{R}\sum_1^\infty \frac{1}{s^2} = -\frac{\pi^2 c}{6}\frac{R'^2}{R}.$$

Dalla (4) otterremo

$$E = M,$$

e la densità media sarà

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^2}.$$

Dalla equazione (3) avremo per la costante c il valore approssimato

$$c = -\frac{M}{R} = -4\pi\rho R.$$

Sostituendo questo valore nella equazione (6) otterremo

$$E' = \frac{\pi^2}{6}\frac{R'^2 M}{R^2} = \frac{\pi^2}{6}\rho\, 4\pi R'^2,$$

e la densità media ρ' della sfera σ', sarà

$$\rho' = \frac{E'}{4\pi R'^2} = \frac{\pi^2}{6}\rho,$$

onde abbiamo il seguente teorema:

Se poniamo in contatto due sfere elettrizzate, ed una di queste sfere è molto piccola in confronto all'altra, il rapporto della densità elettrica media sopra la piccola sfera alla densità elettrica media sopra la sfera grande sarà uguale a $\frac{\pi^2}{6}$.

§. X.

Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra un conduttore la cui superficie è formata da due callotte sferiche.

Sia dato un conduttore la cui superficie è formata dalle callotte sferiche σ e σ' ciascuna delle quali maggiore di una mezza sfera e situate da parti opposte del piano della circonferenza s d'intersezione. Conduciamo un piano per i due centri, e siano A ed A' i punti d'intersezione di questo piano colla circonferenza s. Prendiamo i punti A ed A' per poli di un sistema di coordinate dipolari. Le due callotte sferiche che formano la superficie del conduttore saranno generate dalla rivoluzione intorno alla retta che unisce i centri dei mezzi segmenti di equazione

$$v = \beta\,, \quad v = \beta'\,,$$

e sarà

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}\,, \quad \frac{3\pi}{2} < \beta' < 2\pi\,.$$

Chiameremo congruenti due valori v e v' che differiscono soltanto di multipli di 2π, che quindi corrispondono a una stessa callotta, e scriveremo la congruenza colla notazione

$$v \equiv v'\,.$$

L'angolo ω secondo il quale s'intersecheranno le due callotte sferiche sarà dato dalla congruenza

(1) $$\omega \equiv \beta - \beta'\,,$$

e ponendo

(2) $$\beta' = 2\pi - \alpha\,,$$

avremo

(3) $$\omega \equiv \beta + \alpha\,, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,.$$

Consideriamo il caso in cui l'angolo ω secondo il quale s'incontrano le due callotte sia uguale a $\frac{\pi}{n}$, essendo n un numero intero qualunque.

I punti m_0, m_1, m_2, $\ldots m_{n-1}$, che si trovano sulla retta che unisce i centri delle sfere σ e σ', ed hanno per coordinate dipolari rispettivamente

$$(0\,,\ 2\beta),\ \left(0,\ \frac{2\pi}{n} + 2\beta\right),\ \left(0,\ \frac{4\pi}{n} + 2\beta\right),\ \ldots \left(0,\ \frac{2(n-1)}{n}\pi + 2\beta\right)$$

e i punti: $m'_1, m'_2, \ldots m'_{n-1}$, che si trovano sopra la stessa retta, ed hanno rispettivamente per coordinate

$$\left(0,\frac{2\pi}{n}\right),\ \left(0,\frac{4\pi}{n}\right),\ \ldots\left(0,\frac{2(n-1)}{n}\pi\right),$$

sono tutti situati nell'interno del conduttore. Infatti, abbiamo evidentemente essendo $s<n$,

$$\beta<\frac{2s\pi}{n}+2\beta=\frac{(2s+2)\pi}{n}-2\alpha<2\pi-\alpha=\beta',$$

$$\beta<\frac{2s\pi}{n}<2\pi-\alpha=\beta'.$$

Ora la funzione potenziale Q degli n punti m_s in ciascuno dei quali è concentrata una massa di elettricità negativa uguale ad $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{n}+\beta\right)}$ e degli $n-1$ punti m'_s in ciascuno dei quali è concentrata una massa di elettricità positiva uguale ad $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n}}$, denotando rispettivamente con r_{se} e r'_{se} le distanze di m_s ed m'_s dal punto e, avrà la espressione

$$(4)\ \mathrm{Q}=\sum_0^{n-1}\frac{a}{r_{se}\operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{n}+\beta\right)}-\sum_1^{n-1}\frac{a}{r'_{se}\operatorname{sen}\frac{s\pi}{n}}=\sum_0^{n-1}\frac{\xi_{u,\frac{2s\pi}{n}+2\beta-v}}{\xi_{u,v}}-$$

$$-\sum_1^{n-1}\frac{\xi_{u,v-\frac{2s\pi}{n}}}{\xi_{u,v}},$$

e sopra la callotta sferica: $v=\beta$, avremo

$$\mathrm{Q}=1+\frac{1}{\xi_{u,\beta}}\left(\sum_1^{n-1}\xi_{u,\beta+\frac{2s\pi}{n}}-\sum_1^{n-1}\xi_{u,\beta-\frac{2s\pi}{n}}\right)=1$$

e sopra la callotta: $v = \beta'$, sarà

$$Q = \sum_{0}^{n-1} \frac{\xi_{u,\,\beta' + 2(s+1)\frac{\pi}{n}}}{\xi_{u,\,\beta'}} - \sum_{1}^{n-1} \frac{\xi_{u,\,\beta' + \frac{2s\pi}{n}}}{\xi_{u,\,\beta'}} = 1$$

Dunque la funzione Q è uguale alla unità sopra tutto il conduttore e la funzione potenziale V_e della massa E di elettricità in equilibrio sopra il conduttore nello spazio esterno S_e sarà

$$(5) \quad V_e = cQ = c\sqrt{\cosh u - \cos v}\left\{\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos(2s\pi + 2\beta - v)}} - \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\cosh u - \cos\left(v - \frac{2s\pi}{n}\right)}}\right\},$$

od anche

$$(6) \quad V_e = ca\left(\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{r_{se}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s\pi}{n} + \beta\right)} - \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{r'_{se}\,\mathrm{sen}\,\frac{s\pi}{n}}\right).$$

Denotando con ρ la densità, abbiamo

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_e}{\partial p},$$

onde moltiplicando per l'elemento $d\sigma$ della superficie del conduttore, ed integrando a tutta questa superficie, otterremo

$$(7) \quad E = -ca\left(\sum_{0}^{n-1} \frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{s\pi}{n} + \beta\right)} - \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\mathrm{sen}\,\frac{s\pi}{n}}\right)$$

dalla quale dedurremo il valore di c. Dalle equazioni (5) e (6) si deduce il seguente teorema:

Dato un conduttore la cui superficie è formata da due callotte sferiche che s'incontrano sotto un angolo $\frac{\pi}{n}$, e una massa E di elettricità in equilibrio sopra questo conduttore, potremo distribuire la massa E in $2n-1$ punti interni al conduttore e situati sopra la retta che unisce i centri delle due callotte, in modo che l'azione esercitata da questi punti nello spazio esterno al conduttore, sia uguale a quella che vi esercita la elettricità E in equilibrio sopra la superficie del conduttore.

Sia ora nello spazio S_e esterno al conduttore un punto m di coordinate dipolari (u', v', φ'), nel quale sia concentrata una massa di elettricità negativa uguale alla unità, e siano (u, v, φ) le coordinate dipolari di un punto qualunque e dello spazio S_e che denoteremo con ε quando sarà sopra la callotta $v=\beta$, e con ε' quando sarà sopra la callotta: $v=\beta'$. Il conduttore sia in comunicazione colla terra. Se denotiamo con V_e il valore nel punto e, della funzione potenziale della elettricità indotta dal punto m sopra il conduttore, dovremo avere

$$(8) \qquad V_\varepsilon + \frac{1}{r_{m\varepsilon}} = 0\,, \quad V_{\varepsilon'} + \frac{1}{r_{m\varepsilon'}} = 0\,.$$

Denotiamo con m_s il punto $\left(u', \frac{2s\pi}{n} + 2\beta - v'\right)$, con m'_s il punto $\left(u', v' - \frac{2s\pi}{n}\right)$, e prendiamo la funzione

$$(9) \qquad G_e = \sum_1^{n-1} \frac{\xi_{u', v' - \frac{2s\pi}{n}}}{\xi_{u', v'}} \frac{1}{r_{m'_s e}} - \sum_0^{n-1} \frac{\xi_{u', \frac{2s\pi}{n} + 2\beta - v'}}{\xi_{u', v'}} \frac{1}{r_{m_s e}}\,.$$

Poichè

$$\frac{2s\pi}{n} + 2\beta - 2(s+1)\frac{\pi}{n} = 2\beta'\,,$$

$$\frac{2s\pi}{n} + 2\beta - \frac{2s\pi}{n} = 2\beta\,,$$

i punti $m_0, m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$ sono rispettivamente le imagini dei punti $m, m'_1, m'_2, \ldots m'_{n-1}$ rapporto alla sfera (β), e i punti $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots m'_{n-1}, m$ sono rispettivamente le imagini dei punti: m_0, m_1, $m_2 \ldots m_{-n}$, rapporto alla sfera (β). Quindi se prendiamo l' imagine di m_0 rispetto alla sfera β', avremo m'_1, se prendiamo la imagine di m'_1 rispetto a β, avremo m_1 e così seguitando. Per il teorema della pag. 194 abbiamo

$$\frac{r_{m_s\varepsilon}}{r_{m'_s\varepsilon}} = \frac{\xi_{u',\, \frac{2s\pi}{n} + 2\beta - v'}}{\xi_{u',\, v' - \frac{2s\pi}{n}}}, \quad \frac{r_{m_0\varepsilon}}{r_{m\varepsilon}} = \frac{\xi_{u',\, 2\beta - v'}}{\xi_{u',\, v'}}$$

$$\frac{r_{m'_{s+1}\varepsilon'}}{r_{m_s\varepsilon'}} = \frac{\xi_{u',\, \frac{2s\pi}{n} + 2\beta - v'}}{\xi_{u',\, v' - 2(s+1)\frac{\pi}{n}}}, \quad \frac{r_{m_{n-1}\varepsilon'}}{r_{m\varepsilon}} = \frac{\xi_{u',\, 2\beta - v'}}{\xi_{u',\, v'}}$$

e quindi sono sodisfatte le due equazioni (8). Dunque la funzione G_s data dalla equazione (9) è la funzione potenziale della elettricità indotta sopra il conduttore in comunicazione colla terra dalla massa di elettricità negativa uguale all'unità concentrata nel punto m.

La massa della elettricità indotta si trova nel solito modo uguale al valore che ha nel punto (u', v') la funzione Q determinata dalla equazione (1).

Onde abbiamo il seguente teorema:

Dato un punto m elettrizzato, e un conduttore la cui superficie è formata da due callotte sferiche che s'incontrano secondo un angolo uguale a $\frac{\pi}{n}$ ed è in comunicazione colla terra, si possono determinare $2n - 1$ punti elettrizzati situati nell'interno del conduttore sopra la retta che unisce i centri delle callotte, in modo che l'azione che essi esercitano nello spazio esterno al conduttore sia uguale a quella esercitata nello spazio stesso dall'elettricità indotta dal punto m sopra il conduttore medesimo. La massa totale della elettricità concentrata in questi $2n - 1$ punti dev'essere uguale a quella che è indotta dal punto m sopra le due callotte.

Se il conduttore invece di essere in comunicazione colla terra fosse isolato e carico della massa M di elettricità, la funzione potenziale V della elettricità che si troverebbe in equilibrio sopra le callotte sferiche, sarebbe nello spazio esterno S_e

$$V_e = cQ + G_e\,, \tag{10}$$

e denotando con γ la capacità del conduttore, che si deduce dalla equazione (7), ponendovi $c' = 1$, avremo per determinare la costante c, la equazione

$$M = c\gamma + Q'\,, \tag{11}$$

essendo Q' il valore nel punto m della funzione Q data dalla equazione (4).

Il valore della funzione potenziale W del punto m e della elettricità del conduttore sarebbe

$$W_e = \frac{1}{r_{me}} + cQ + G_e\,, \tag{12}$$

§. XI.

Metodo delle imagini.

Abbiamo dimostrato nel §. V. di questo Capitolo che un punto m, nel quale è concentrata una massa di elettricità negativa uguale all'unità, elettrizza per induzione una sfera conduttrice σ in comunicazione colla terra, in modo che l'azione di questa sfera così elettrizzata nello spazio S_e esterno ad essa è uguale all' azione che nel medesimo spazio eserciterebbe il punto m' imagine di m rispetto a σ, quando in m' fosse concentrata una massa di elettricità positiva uguale al rapporto del raggio R della sfera σ alla distanza r_m del punto m dal centro di σ. Se nel punto m invece di essere concentrata una massa di elettricità negativa uguale alla unità, fosse concentrata una massa di elettricità uguale ad E, nel punto m' dovrebbe supporsi concentrata una massa uguale a $-\frac{ER}{r_m}$. Da questo teorema si deduce che una sfera conduttrice in comunicazione colla terra rispetto ad un punto elettrizzato agisce come uno specchio rispetto a un punto luminoso, e quindi se ne può ricavare un metodo per determinare la distribuzione della elettricità in equilibrio sopra più conduttori di forma sferica, che si chiama metodo delle imagini ed è dovuto a *W. Thomson*. Facciamone l'applicazione al caso di due sole sfere già trattato nel §. VII.

Siano dati un punto m nel quale sia concentrata una massa di elettricità negativa uguale all'unità e due conduttori σ e σ' di forma sferica in comunicazione colla terra. Siano rispettivamente C e C′ i centri, R ed R′ i raggi delle sfere σ e σ', ed r_0, r'_0 le rispettive distanze di m da C e da C′. Determiniamo i punti m_0, m_1, m_2, ... m_s, ... in modo che m_0 sia imagine di m rispetto a σ, m_{2s+1} sia imagine di m_{2s} rispetto a σ', ed m_{2s} sia imagine di m_{2s-1} rispetto a σ; determiniamo i punti m'_0, m'_1, m'_2, ... m'_s ... in modo che m'_0 sia imagine di m rispetto a σ', m'_{2s+1} sia imagine di m'_{2s} rispetto a σ ed m'_{2s} sia imagine di m'_{2s-1} rispetto a σ'. È chiaro che i punti m_{2s} m'_{2s+1} saranno nell'interno della sfera σ e i punti m'_{2s}, m_{2s+1} saranno nell'interno della sfera σ'. Denotiamo con r_{2s}, r'_{2s+1} le rispettive distanze dei punti m_{2s} ed m'_{2s+1} dal centro C′, e con r'_{2s}, r_{2s+1} le rispettive distanze dei punti m'_{2s}, m_{2s+1} dal centro C. La sfera σ produrrà un'imagine del punto m nel punto m_0, e la massa di questa imagine sarà uguale ad $\frac{R}{r_0}$. La sfera σ' produrrà anch'essa una imagine nel punto m_0 di massa $\frac{R'}{r'_0}$. La sfera σ' rispetto alla quale è esterna la imagine m_0 di massa $\frac{R}{r_0}$, produrrà una imagine m_1 di questa imagine, e la massa di m_1 sarà uguale a $-\frac{R}{r_0}\frac{R'}{r_1}$. La sfera σ rispetto alla quale è esterna la imagine m'_0 di massa $\frac{R'}{r'_0}$ produrrà una imagine m'_1 di m'_0, e la massa di m'_1 sarà uguale a $-\frac{R'}{r'_0}\frac{R}{r'_1}$. La sfera σ produrrà una imagine m_2 di m_1, di massa $\frac{R}{r_0}\frac{R'}{r_1}\frac{R}{r_2}$, e la sfera σ' una imagine m'_2 di m'_1, di massa $\frac{R'}{r'_0}\frac{R}{r'_1}\frac{R'}{r'_2}$, e così seguitando.

Avremo dunque dalle due sfere due serie infinite d'imagini

$$m_0\,,\ m_1\,,\ m_2\,,\ldots,m_s\,,\ldots$$
$$m'_0\,,\ m'_1\,,\ m'_2\,,\ldots,m'_s\,,\ldots$$

e denotando con m_s ed m'_s le masse rispettive delle imagini m_s ed m'_s, sarà

$$(1)\qquad m_{2s}=-\frac{R}{r_{2s}}m_{2s-1}\,,\ m_{2s+1}=-\frac{R'}{r_{2s}}m_{2s}\,,\ m_0=\frac{R}{r_0}\,,$$

$$(2)\qquad m'_{2s}=-\frac{R'}{r'_{2s}}m_{2s-1}\,,\ m_{2s+1}=-\frac{R}{r'_{2+1}}m_{2s}\,,\ m'_0=\frac{R'}{r'_0}\,.$$

Ora la funzione potenziale G_e della elettricità indotta dal punto m sopra le due sfere σ e σ', nello spazio S_e esterno alle sfere, è uguale alla funzione potenziale delle imagini prodotte dalle sfere stesse. Dunque, denotando con r_{es}, r'_{es} le distanze rispettive dei punti m_s ed m'_s dal punto e, sarà

$$G_e=\sum_0^\infty\left(\frac{m_s}{r_{es}}+\frac{m'_s}{r'_{es}}\right).$$

I punti m_{2s-1}, m_{2s} sono reciproci rispetto alla sfera σ, quindi le loro distanze da un punto qualunque di σ stanno tra loro come R ad r_{2s}, ma per un teorema del §. VI, queste distanze stanno anche tra loro come i rispettivi parametri ξ_{2s} e ξ_{2s-1} dei punti m_{2s-1} ed m_{2s}; dunque

$$\frac{R}{r_{2s}}=\frac{\xi_{2s-1}}{\xi_{2s-2}}.$$

Analogamente si ottiene

$$\frac{R'}{r_{2s-1}}=\frac{\xi_{2s-1}}{\xi_{2s-2}}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazioni (1) si ricava

$$m_{2s} = \frac{\xi_{2s}}{\xi}, \; m_{2s-1} = -\frac{\xi_{2s-1}}{\xi}$$

dove ξ denota il parametro del punto m. Con uguali considerazioni relative ai punti m'_n, si ottiene

$$m'_{2s} = \frac{\xi'_{2s}}{\xi}, \; m'_{2s-1} = -\frac{\xi'_{2s-1}}{\xi}$$

e quindi

$$G_e = \sum_0^{\infty} \left\{ \frac{\xi_{2s}}{\xi} \frac{1}{r_{e,\,2s}} - \frac{\xi_{2s+1}}{\xi} \frac{1}{r_{e,\,2s+1}} + \frac{\xi'_{2s}}{\xi} \frac{1}{r'_{e,\,2s}} - \frac{\xi'_{2s+1}}{\xi} \frac{1}{r'_{e,\,2s+1}} \right\},$$

come trovammo nel §. VII.

La funzione G_e non è altro che la funzione che nel §. XI. del Cap. I, abbiamo chiamato la funzione di *Green*, la quale serve a determinare una funzione potenziale nello spazio esterno a una superficie σ che racchiude nel suo interno tutta la massa a cui la funzione potenziale si riferisce, quando siano dati i valori di questa funzione sopra tutta la superficie σ. Col metodo indicato in quel paragrafo si potrebbero determinare le due funzioni potenziali Q e Q' del §. VII, e quindi la funzione potenziale della elettricità in equilibrio sopra le due sfere.

Applichiamo direttamente il metodo delle imagini alla determinazione della funzione potenziale Q che sopra σ è uguale alla unità e sopra σ' è uguale a zero.

La funzione potenziale della elettricità in equilibrio sopra una sfera σ, che è uguale alla unità sopra la superficie σ, è nello spazio S_e esterno a σ uguale ad $\frac{R}{r}$, dove r denota la distanza del punto e dal centro C della sfera σ. Quindi il punto C di massa R si potrà riguardare come l'imagine di σ elettrizzata finchè abbia sopra sè stessa la funzione potenziale uguale alla unità. La funzione $Q - \frac{R}{r}$ sarà dunque la funzione potenziale dell'elettricità in equilibrio sopra σ e σ' quando siano poste in comunicazione colla terra, sotto l'azione del punto C in cui è concentrata la massa R. La sfera σ', rispetto alla quale soltanto il punto C è esterno, produrrà una imagine m_1 di C, di massa: $-\mathrm{R}\dfrac{\mathrm{R}'}{r_1}$, essendo r_1 la distanza di C da C'. La sfera σ analogamente produrrà una imagine m_2 del punto m_1, di massa: $\mathrm{R}\dfrac{\mathrm{R}'}{r_1}\dfrac{\mathrm{R}}{r_2}$, essendo r_2 la distanza di m_1 da C, e così seguitando. Denotando con r_{se} la distanze da e del punto m_s, e con m_s la massa della imagine m_s, avremo dunque

$$\mathrm{Q} = \sum_0^\infty \frac{m_s}{r_{se}},$$

dove

$$m_{2s-1} = -\frac{\mathrm{R}'}{r_{2s-1}} m_{2s-2}, \quad m_{2s} = -\frac{\mathrm{R}}{r_{2s}} m_{2s-1}, \quad m_0 = \mathrm{R}, \quad r_{e0} = r .$$

§. XII.

Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra un' ellissoide conduttrice.

Nel §. XIV. del Cap. I. abbiamo dimostrato che data un'ellissoide σ di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

la funzione V, la quale nello spazio S_e esterno alla superficie σ è espressa dalla equazione

$$\mathrm{V}_e = 2\pi abc\rho\int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\lambda}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{M}}{2}\int_{\lambda_1}^\infty \frac{d\lambda}{\mathrm{D}}, \tag{1}$$

dove λ_1 è la radice positiva della equazione

$$\mathrm{H} = 1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda_1} - \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} - \frac{z^2}{c^2+\lambda_1} = 0,$$

e

$$D = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} ,$$

e che nello spazio S_i interno alla superficie σ è espressa dalla formula

$$(2) \qquad V_i = \frac{M}{2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{D} ,$$

è la funzione potenziale di uno strato di livello disteso sopra σ di massa attraente uguale ad M, e di densità ρ data dalla equazione

$$\rho = \frac{M}{8\pi abc}\left(\sqrt{\Delta\lambda}\right)_0 ,$$

la quale esprimendo il secondo membro in coordinate ellittiche come nel §. XV. del Cap. I, diviene

$$(3) \qquad \rho = \frac{M}{4\pi\sqrt{\mu_1 \nu_1}} .$$

Poichè l'elettricità in equilibrio sopra un conduttore isolato forma uno strato di livello, se comunichiamo all'ellissoide σ conduttrice e isolata una massa M di elettricità, la funzione potenziale di questa nello stato di equilibrio sarà data nello spazio S_e dalla equazione (1) e nello spazio S_i dall'equazione (2), nelle quali è preso con segno contrario il secondo membro, per ciò che abbiamo detto alla fine del §. I, e la densità sarà determinata dalla equazione (3).

Le coordinate μ_1, ν_1 sono i due valori negativi di s che sodisfano alla equazione

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1 ,$$

e se il punto (x, y, z) appartiene all'ellissoide σ, avremo anche

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Onde μ_1 e ν_1 saranno le radici della equazione di secondo grado

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2(a^2+s)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+s)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+s)} = 0 \,,$$

che si ottiene sottraendo la (4) dalla equazione (5).

Ora, denotando con l, m, n i coseni degli angoli che la normale a σ nel punto (x, y, z) fa cogli assi, abbiamo

$$l : m : n = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2} \,;$$

quindi la equazione (6) può scriversi

$$(7) \qquad \frac{l^2 a^2}{a^2+s} + \frac{m^2 b^2}{b^2+s} + \frac{n^2 c^2}{c^2+s} = 0 \,.$$

Ma dalla Geometria Analitica è noto che l'equazione (7) ha per radici

$$s_1 = -a_1^2 \,, \ s_2 = -b_1^2 \,,$$

denotando a_1 e b_1 i semiassi dell'ellisse intersezione colla superficie σ del piano condotto per il centro parallelamente al piano tangente a σ nel punto (x, y, z). Dunque

$$\sqrt{\mu_1 \nu_1} = a_1 b_1 \,,$$

e quindi

$$(8) \qquad \rho = \frac{M}{4\pi a_1 b_1} \,,$$

ed abbiamo il seguente teorema dovuto al Sig. *Carlo Neumann* :

Se comunichiamo una massa di elettricità a un conduttore isolato che abbia la forma di un'ellissoide, la distribuzione elettrica nello stato di equilibrio, quando non vi siano forze esterne, avverrà in modo, che le densità nei diversi punti saranno in ragione inversa dell'aree delle sezioni fatte nell'ellissoide dai piani condotti per il centro parallelamente ai piani tangenti all'ellissoide in questi medesimi punti.

È noto che denotando con R ed R′ i raggi di curvatura dell'ellissoide σ nel punto x, y, z, si ha

$$\sqrt{\mathrm{R}\mathrm{R}'} = abc\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = \frac{4abc}{(\Delta\lambda)_0},$$

onde

$$(9) \qquad \rho = \frac{\mathrm{M}}{2\pi\sqrt{abc}\,\sqrt[4]{\mathrm{R}\mathrm{R}'}},$$

e quindi il teorema dovuto al Prof. *Paolo Paci:*

Nel caso del teorema precedente le densità dell'elettricità in equilibrio nei diversi punti dell'ellissoide sono in ragione inversa delle radici quarte delle rispettive curvature.

Ponendo

$$(10) \qquad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \lambda + c^2 = \frac{l^2}{\mathrm{tg}^2 u}, \quad l = \sqrt{a^2 - c^2},$$

avremo, come nel §. XIV del Cap· I,

$$(11) \qquad \begin{aligned} \mathrm{V}_e &= -\frac{\mathrm{M}}{l}u_1 = -\frac{\mathrm{M}}{l}\,\mathrm{amtg}\,\frac{l}{\sqrt{\lambda_1 + c^2}}, \\ \mathrm{V}_i &= -\frac{\mathrm{M}}{l}\,\mathrm{amtg}\,\frac{l}{c}. \end{aligned}$$

Se l'ellissoide è di rivoluzione intorno all'asse z sarà $a = b$, e quindi

$$k = 0, \quad \mathrm{tg}u = \mathrm{tang}u,$$

e l'equazioni (11) diverranno

$$(12) \qquad \begin{aligned} \mathrm{V}_e &= -\frac{\mathrm{M}}{l}\,\mathrm{arctang}\,\frac{l}{\sqrt{\lambda_1 + c^2}}, \\ \mathrm{V}_i &= -\frac{\mathrm{M}}{l}\,\mathrm{arctang}\,\frac{l}{c}. \end{aligned}$$

Prendendo la coordinate ellittiche μ, ν definite dall'equazioni

$$(13) \qquad \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= l\cosh\mu\,\cos\nu, \\ z &= l\,\mathrm{senh}\mu\,\mathrm{sen}\nu, \end{aligned}$$

sarà

$$\sqrt{\lambda_1^2+c^2}=l\mathrm{senh}\mu\,,$$

e quindi

(14) $$V_e=-\frac{M}{l}\arctang\frac{1}{\mathrm{senh}\,\mu}\,,\quad V_i=-\frac{M}{l}\arctang\frac{l}{c}\,.$$

Per ciò che abbiamo dimostrato alla fine del §. II. del Cap. I, denotando con H^2_0 l'inversa del parametro differenziale di prim'ordine di μ, e con μ_0 il valore di μ sopra l'ellissoide, la densità ρ sarà

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_e}{\partial\mu}\frac{1}{H_0}\right)_{\mu=\mu_0}=\frac{M}{4\pi l^2\cosh\mu_0\sqrt{\cosh^2\mu_0-\cos^2\nu}}\,,$$

ed osservando che si ha $l\cosh\mu_0=a$, otterremo

(15) $$\rho=\frac{M}{4\pi a\sqrt{a^2-l^2\cos^2\nu}}\,.$$

L'elemento di superficie è

$$d\sigma=a\cos\nu\sqrt{a^2-l^2\cos^2\nu}\;d\theta d\nu\,,$$

onde abbiamo la identità

$$M=\int_\sigma\rho d\sigma=\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\nu d\nu=M\,,$$

la quale serve a verificare l'equazione (15).

Se l'ellissoide è di rivoluzione intorno all'asse delle x sarà $b=c$, e quindi

$$k^2=1\,,\ \mathrm{tg}u=\mathrm{senh}u\,,$$

e l'equazioni (11) diverranno

(16) $$V_e=-\frac{M}{l}\log\frac{l+\sqrt{\lambda_1+a^2}}{\sqrt{\lambda_1+c^2}}\,,\qquad V_i=-\frac{M}{l}\log\frac{a+l}{c}\,,$$

Prendendo le coordinate èllittiche

$$x = l\cosh\mu \cos\nu,$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = l\operatorname{senh}\mu \operatorname{sen}\nu,$$

avremo

(17) $$\sqrt{\lambda_1 + a^2} = l\cosh\mu, \quad \sqrt{\lambda_1 + c^2} = l\operatorname{senh}\mu,$$

e quindi

(18) $$V_e = -\frac{M}{l}\log\frac{1+\cosh\mu}{\operatorname{senh}\mu} = \frac{M}{l}\operatorname{logtangh}\frac{1}{2}\mu.$$

La densità ρ sarà data dalla equazione

(19) $$\rho = \frac{M}{4\pi c\sqrt{a^2 - l^2\cos^2\nu}},$$

che si ottiene e si può verificare come nel caso precedente.

§. XIII.

Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra un disco e sopra un filo conduttori.

Un disco ellittico infinitamente sottile può riguardarsi come un'ellissoide la quale abbia il semiasse minore infinitesimo. Quindi si otterrà la funzione potenziale V di una massa M di elettricità in equilibrio sopra un disco ellittico infinitamente sottile di semiassi a e b ponendo nelle formule (10) e (11) del paragrafo precedente

$$c = 0,$$

onde

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad l = a,$$

(1) $$V_e = -\frac{M}{a}\operatorname{am}\operatorname{tg}\frac{a}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad V_i = -\frac{MK}{a},$$

denotando con K l'integrale ellittico completo di prima specie di modulo k, e con λ_1 la radice positiva della equazione

$$\frac{x^2}{\lambda_1 + a^2} + \frac{y^2}{\lambda_1 + b^2} + \frac{z^2}{\lambda_1} = 1 .$$

La densità ρ della elettricità sopra la superficie dal disco sarà data dalla equazione (3) del paragrafo precedente. Ma nel §. XV del Cap. I, abbiamo dimostrato che quando $c = 0$, abbiamo

$$\sqrt{\mu_1 \nu_1} = ab \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} ,$$

onde si ottiene

$$(2) \qquad \rho = \frac{M}{4\pi ab \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} .$$

Quando il disco fosse circolare, avremmo

$$b = a ,$$

e dovremmo porre $c = 0$ nelle formule (4) del paragrafo precedente, e si otterrebbe

$$(3) \qquad V_e = -\frac{M}{a} \operatorname{arctang} \frac{1}{\operatorname{senh}\mu} , \quad V_i = -\frac{M\pi}{2a} ,$$

e dall'equazioni (13) eliminando ν si deduce che $\operatorname{senh}\mu$ è la radice reale e positiva della equazione

$$(4) \qquad a^2 \operatorname{senh}^4\mu - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \operatorname{senh}^2\mu - z^2 = 0 .$$

Per la densità ρ dalla equazione (2) abbiamo

$$(5) \qquad \rho = \frac{M}{4\pi a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}}} .$$

Per avere la capacità γ del disco basta porre nella seconda dall'equazioni (3)

$$V_i = 1 ,$$

ed abbiamo

$$(6) \qquad \gamma = -\frac{2a}{\pi},$$

e in questo caso la prima delle equazioni (3) e la (5) divengono

$$(7) \qquad V_e = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \frac{1}{\operatorname{senh}\mu},$$

$$(8) \qquad \rho = -\frac{1}{2a\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{a^2}}}.$$

Un filo conduttore infinitamente sottile, cioè un cilindro conduttore di lunghezza $2a$, e di sezione circolare di raggio c, quando $\frac{c}{a}$ è infinitamente piccolo, può riguardarsi come un'ellisoide di rivoluzione intorno all'asse maggiore, nella quale gli altri due semiassi sono uguali ed infinitesimi. Quindi la funzione potenziale di una massa M di elettricità distribuita in equilibrio sopra un filo conduttore, quando questo sarà molto sottile, sarà determinata dall'equazioni (16), (18) e (19) del paragrafo precedente, cioè avremo

$$V = -\frac{M}{l} \operatorname{logtangh} \frac{1}{2}\mu, \quad V_i = -\frac{M}{l} \log \frac{a+l}{c},$$

dove $\operatorname{senh}\mu$ è la radice reale e positiva della equazione

$$l^2 \operatorname{senh}^4\mu - (x^2+y^2+z^2-l^2)\operatorname{senh}^2\mu - y^2 - z^2 = 0,$$

e la densità ρ sarà data dalla formula

$$\rho = \frac{M}{4\pi c\sqrt{a^2 - l^2\cos^2\nu}}.$$

La quantità $d\sigma$ di elettricità contenuta sopra una porzione di superficie compresa tra due sezioni piane infinitamente vicine normali alle asse di rivoluzione, sarà

$$d\sigma = 2\pi\rho\, l \operatorname{senh}\mu_0 \operatorname{sen}\nu\, ds,$$

dove ds denota l'elemento dall'ellisse generatrice della superficie, e $\operatorname{senh}\mu_0$ è determinato dalla seconda dell'equazioni (17) del paragrafo precedente, nella quale è posto

$$\lambda_1 = 0\,,$$

e quindi

$$l \operatorname{senh}\mu_0 = c\,.$$

Avremo dunque

$$d\sigma = \frac{M \operatorname{sen}\nu}{2\sqrt{a^2 - l^2\cos^2\nu}}\, ds\,,$$

e la densità elettrica δ di una sezione del filo, sarà

$$\delta = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{M \operatorname{sen}\nu}{2\sqrt{a^2 - l^2\cos^2\nu}}\,.$$

Col diminuire della sezione del filo, diminuisce c, l si avvicina ad a, ed al limite per $c = 0$, abbiamo

$$\delta = \frac{M}{2a}\,.$$

Onde si deduce il seguente teorema:

Sopra un filo cilindrico conduttore isolato, nel quale il raggio della sezione è molto piccolo in confronto dell'altezza, la distribuzione della elettricità in equilibrio si avvicina tanto più alla uniformità, quanto più piccolo è il rapporto del raggio della sezione, alla lunghezza del filo.

Quando il filo è infinitamente sottile la funzione potenziale della elettricità in equilibrio avrà la espressione data nel §. V del Cap. I, per la funzione potenziale di una retta omogenea.

§. XIV.

Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra una callotta sferica conduttrice.

Sia dato un conduttore che abbia la forma di una callotta sferica K infinitamente sottile. Siano C il centro ed R il raggio della sfera σ della quale la callotta K è una parte; O il centro ed a il raggio della circonferenza s che forma il contorno di K, ed F il circolo che ha s per circonferenza. Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane che abbia il punto O per origine e il piano di F per piano delle $x\,y$.

La funzione potenziale w del circolo F, la quale ha sopra F il valore costante ed uguale alla unità, per ciò che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente, sarà

$$(1) \qquad w = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \frac{1}{\operatorname{senh}\mu},$$

dove $\operatorname{senh}\mu$ è la radice reale e positiva della equazione

$$(2) \qquad a^2 \operatorname{senh}^4\mu - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \operatorname{senh}^2\mu - z^2 = 0 .$$

Denotiamo con S_i lo spazio racchiuso dalla callotta K e dal circolo F, con S_e il rimanente spazio, e prendiamo una funzione W la quale nello spazio S_e sia data dalla equazione

$$(3) \qquad W_e = w = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \frac{1}{\operatorname{senh}\mu},$$

e nello spazio S_i abbia la espressione

$$(4) \qquad W_i = 2 - w = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \left(-\frac{1}{\operatorname{senh}\mu}\right).$$

Sopra il circolo F abbiamo

$$w = 1 ,$$

e quindi

$$W_e = W_i ,$$

ed anche

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial(-z)},$$

onde

$$\frac{\partial W_e}{\partial z} = \frac{\partial W_i}{\partial z} .$$

Dunque la funzione W la quale in tutto lo spazio sodisfa alla equazione: $\Delta^2 W = 0$, e all'infinito si annulla, è finita e continua insieme colle sue derivate prime attraverso il circolo F, ed è soltanto discontinua attraverso la callotta K.

Facciamo ora rispetto alla sfera σ una trasformazione per raggi vettori reciproci, che denoteremo con T_{CR}. La imagine del circolo F sarà una callotta sferica F', avrà per contorno la circonferenza s e farà parte della sfera che passa per la circonferenza s e per il centro C della sfera σ. La imagine della callotta K sarà la callotta K stessa. Quindi la imagine dello spazio S_i sarà lo spazio S'_i racchiuso tra le due callotte sferiche F' e K. Denotando con W' e w' ciò che divengono W e w quando in esse si fa la trasformazione T_{CR}, con r la distanza dal centro C del punto cui si riferisce il valore della funzione U che negli spazi S'_i S_i e nel rimanente spazio S'_e è data rispettivamente dall'equazioni

$$(5)\quad U_{i'} = \frac{R}{r} W'_i = \frac{R}{r}(2 - w'),\ U_i = \frac{R}{r} W'_{i'} = \frac{R}{r} w',\ U_{e'} = \frac{R}{r} W'_{e'} = \frac{R}{r} w',$$

per ciò che abbiamo dimostrato nel §. XIX del Cap. I, la funzione U sodisfarà in tutto lo spazio all'equazione $\Delta^2 V = 0$, si annullerà all'infinito, sarà finita e continua insieme colle sue derivate prime attraverso la callotta F' e il circolo F, e sarà soltanto discontinua attraverso la callotta K.

Prendiamo ora la funzione Q data dalla espressione

$$(6)\qquad Q = \frac{1}{2}(W + U),$$

la quale nello spazio S'_i sarà

$$(7)\qquad Q_{i'} = \frac{1}{2}\left(W_e + \frac{R}{r} W'_i\right) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{R}{r}(2 - w')\right),$$

e nello spazio S_i

$$(8)\qquad Q_i = \frac{1}{2}\left(W_i + \frac{R}{r} W'_{i'}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - w + \frac{R}{r} w'\right),$$

Sopra la callotta K abbiamo $r = R$, $w = w'$ e quindi

$$Q_{i'} = Q_i = 1 .$$

Dunque la funzione Q, oltre a sodisfare la equazione

$$\Delta^2 Q = 0 ,$$

ad annullarsi all'infinito, ad essere finita e continua insieme colle sue derivate prime in tutto lo spazio esclusa la callotta K, è anche finita e continua attraverso K, e sopra K ha il valore costante ed uguale alla unità. Onde la funzione potenziale V di una massa qualunque E di elettricità in equilibrio sopra K, quando non vi siano forze esterne, per ciò che abbiamo dimostrato nel §. III. di questo Capitolo, sarà data dalla formula

$$V = cQ , \tag{9}$$

e la densità elettrica ρ sarà

$$\rho = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial Q_{i'}}{\partial r} - \frac{\partial Q_i}{\partial r}\right)_{r = R} . \tag{10}$$

Sostituendo nell'equazioni (7) e (8) i valori dati dalle (3) e (4), e denotando con μ' ciò che diviene μ per la trasformazione T_{CR}, otterremo

$$Q_{i'} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctang}\frac{1}{\operatorname{senh}\mu} + \frac{R}{r}\operatorname{arctang}\left(-\frac{1}{\operatorname{senh}\mu'}\right)\right] , \tag{11}$$

$$Q_i = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctang}\left(-\frac{1}{\operatorname{senh}\mu}\right) + \frac{R}{r}\operatorname{arctang}\frac{1}{\operatorname{senh}\mu'}\right] . \tag{12}$$

Ora abbiamo

$$\frac{\partial \operatorname{arctang}\dfrac{1}{\operatorname{senh}\mu}}{\partial r} = -\frac{1}{\cosh\mu}\frac{\partial\mu}{\partial r} ,$$

e dalla equazione (2) osservando le due relazioni

$$R^2 = x^2 + y^2 + (z \pm \sqrt{R^2 - a^2})^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{\cosh^2\mu} + \frac{z^2}{\operatorname{senh}^2\mu} = a^2 ,$$

nella prima delle quali deve prendersi il segno positivo o negativo secondo che la callotta K è minore o maggiore di una semisfera, si ricava

$$(2a^2\operatorname{senh}^2\mu - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)) \operatorname{senh}\mu \cosh\mu \frac{\partial\mu}{\partial r} =$$

$$= \frac{\cosh^2\mu}{r}(a^2\operatorname{senh}^2\mu \pm z\sqrt{R^2 - a^2}) .$$

Per $r = R$ avendosi

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = \mp 2z\sqrt{R^2 - a^2} , \tag{13}$$

si ottiene

$$\frac{\partial\mu}{\partial r} = \frac{\cosh\mu}{2R \operatorname{senh}\mu} ,$$

e

$$\frac{\partial \operatorname{arctang} \frac{1}{\operatorname{senh}\mu}}{\partial r} = -\frac{1}{2R \operatorname{senh}\mu} . \tag{14}$$

Osservando che μ' è funzione di $\frac{R^2}{r}$ come μ è funzione di r, e quindi per $r = R$

$$\frac{\partial\mu'}{\partial r} = -\frac{\cosh\mu'}{2R\operatorname{senh}\mu'} ,$$

e che inoltre sopra K

$$\mu = \mu' ,$$

avremo

$$\frac{\partial \operatorname{arctang} \frac{1}{\operatorname{senh}\mu'}}{\partial r} = \frac{1}{2R\operatorname{senh}\mu} . \tag{15}$$

Effettuando le derivazioni della equazione (11) ed osservando la (14) e la (15) avremo sopra K

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{1}{\pi R}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\mu} + \operatorname{arctang}\left(-\frac{1}{\operatorname{senh}\mu}\right)\right) , \tag{16}$$

e derivando la equazione (12)

$$(17) \qquad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{1}{\pi R}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\mu} - \operatorname{arctang}\frac{1}{\operatorname{senh}\mu}\right).$$

Sostituendo i valori (16) e (17) nella equazione (10) ed osservando la relazione

$$\operatorname{arctang}\left(-\frac{1}{\operatorname{senh}\mu}\right) - \operatorname{arctang}\frac{1}{\operatorname{senh}\mu} = 2\operatorname{arctang}\operatorname{senh}\mu ,$$

otterremo

$$(18) \qquad \rho = -\frac{c}{2\pi^2 R}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\mu} + \operatorname{arctang}\operatorname{senh}\mu\right).$$

Se invece di riguardare la callotta K come una superficie, la supponiamo uno strato di grossezza infinitesima potremo distinguere la faccia convessa dalla concava, e denotando con ρ_1 la densità sopra la faccia convessa e con ρ_2 la densità sopra la faccia concava, avremo

$$(19) \qquad \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{c}{4\pi}\frac{\partial Q_e}{\partial r} , \\ \rho_2 &= -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial Q_i}{\partial r} , \end{aligned}$$

e in queste equazioni sostituiremo i valori (16) e (17).

Denotando con l l'altezza della callotta sferica K, sarà

$$l = R \mp \sqrt{R^2 - a^2} ,$$

ed osservando che sopra K è verificata l'equazione (13), dalla (2) ricaveremo poichè μ è positivo

$$\operatorname{senh}\mu = \frac{\sqrt{lz}}{a} .$$

Sostituendo questo valore nella equazione (18) essa diviene

$$(20) \qquad \rho = -\frac{c}{2\pi^2 R}\left(\frac{a}{\sqrt{lz}} + \operatorname{arctang}\frac{\sqrt{lz}}{a}\right)$$

Se poniamo il polo nel centro C della callotta K, l'elemento di K in coordinate polari sarà

$$d\sigma = R^2 \mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\,, \tag{21}$$

ed

$$R\cos\theta = z \pm \sqrt{R^2 - a^2}\,,$$

e quindi

$$-R\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta = dz\,,$$

$$d\sigma = -R\,dz\,d\varphi\,. \tag{22}$$

Moltiplichiamo il primo membro della equazione (20) per il valore (21), e il secondo per il valore (22) di $d\sigma$, e integriamo estendendo la integrazione a tutta la callotta K. Osservando che il limite inferiore degl'integrali rapporto a z del secondo membro sarà uguale ad l, e il limite superiore sarà uguale a zero, avremo

$$E = -\frac{c}{\pi}\left(\frac{a}{\sqrt{l}}\int_0^l \frac{dz}{\sqrt{z}} + \int_0^l dz \,\mathrm{arctang}\, \frac{\sqrt{lz}}{a}\right).$$

Effettuando le integrazioni e denotando con k la corda del mezzo segmento meridiano della callotta K, e con θ l'angolo al centro corrispondente a questo mezzo segmento, e quindi

$$k^2 = a^2 + l^2\,,\ \mathrm{tang}\,\frac{\theta}{2} = \frac{l}{a}\,,$$

avremo

$$E = -\frac{c}{2\pi l}(2al + k^2\theta)\,.$$

Quindi la capacità γ della callotta K, la quale è il valore di E quando $c = 1$, sarà

$$\gamma = -\frac{2al + k^2\theta}{2\pi l}\,, \tag{23}$$

e in generale

$$E = c\gamma\,.$$

Ponendo

$$x^2 + y^2 + (z - l)^2 = r^2\,,$$

e sottraendo da questa l'equazione (13) avremo

$$2z\mathrm{R} = k^2 - r^2\,.$$

Abbiamo inoltre identicamente

$$\frac{l}{2\mathrm{R}a^2} = \frac{1}{4\mathrm{R}^2 - k^2}\,,$$

onde

$$\mathrm{senh}\mu = \frac{\sqrt{lz}}{a} = \sqrt{\frac{k^2 - r^2}{4\mathrm{R}^2 - k^2}}\,,$$

e sostituendo questa espressione di senhμ nelle equazioni (19) nelle quali sono posti i valori dati dalle equazioni (16) e (17), otterremo le espressioni della densità ρ sotto la forma trovata da *W. Thomson*, che il primo risolvè questo problema, cioè

$$(24)\quad \begin{cases} \rho_1 = -\dfrac{c}{4\pi^2\mathrm{R}}\left(\sqrt{\dfrac{4\mathrm{R}^2 - k^2}{k^2 - r^2}} + \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctang}\sqrt{\dfrac{4\mathrm{R}^2 - k^2}{k^2 - r^2}}\right), \\[2ex] \rho_2 = -\dfrac{c}{4\pi^2\mathrm{R}}\left(\sqrt{\dfrac{4\mathrm{R}^2 - k^2}{k^2 - r^2}} - \mathrm{arctang}\sqrt{\dfrac{4\mathrm{R}^2 - k^2}{k^2 - r^2}}\right). \end{cases}$$

La quantità μ per la quale abbiamo espresso la funzione potenziale Q, è determinata insieme alla quantità ν dall' equazioni (13) del §. XII, nelle quali è posto $l = a$, o anche come abbiamo veduto nel §. VI. dalla equazione

$$\sqrt{x^2 + y^2} + iz = a\cosh(\mu + i\nu)\,,$$

dalla quale si deduce

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = a^2(\mathrm{senh}^2\mu - \mathrm{sen}^2\nu)\,,$$

$$z = a\,\mathrm{senh}\mu\,\mathrm{sen}\nu\,.$$

Moltiplicando la ultima per $2ai$ e sommandola colla precedente, avremo per la determinazione di senhμ anche la equazione

$$a^2(\mathrm{senh}\,\mu + i\mathrm{sen}\nu)^2 = x^2 + y^2 + (z + ai)^2\,.$$

Ora sia data una sfera S di centro m e di raggio h, e due circonferenze s ed s_1 imagini una dell' altra rispetto alla sfera S. Siano O il centro, a il raggio ed F il piano della circonferenza s; O_1 il centro, a_1 il raggio ed F_1 il piano della circonferenza s_1. Denotiamo con (x_1, y_1, z_1) un sistema di assi che ha l' origine nel punto O_1, e per piano $x_1 y_1$ il piano F_1, e con (x, y, z) un sistema che ha la origine nel punto O e per piano xy il piano F, e sia e_1 un punto di coordinate (x_1, y_1, z_1) nel primo sistema di assi, ed e il punto imagine di e_1 rispetto alla sfera S e siano x, y, z le coordinate di e. Sia inoltre

$$(25)\qquad a_1^2\,(\mathrm{senh}\mu_1 + i\,\mathrm{sen}\nu_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + (z_1 + a_1 i)^2\,,$$

e proponiamoci di determinare i valori μ, ν di μ_1 e ν_1 quando si esprimono le coordinate x_1, y_1, z_1 di e_1 in funzione delle coordinate x, y, z, di e, cioè quando si fa la trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto a S, che denoteremo con T_{mh}.

La parte reale del secondo membro della equazione (25) uguagliata a zero dà la equazione di una sfera α_1 che ha il centro nell'origine O_1 del sistema di coordinate (x_1, y_1, z_1) ed il raggio uguale ad a_1; la parte imaginaria uguagliata a zero dà la equazione del piano F_1. Quindi se la equazione della sfera α imagine della sfera α_1 rispetto ad S è

$$\theta = 0\,,$$

e la equazione della sfera β imagine del piano F_1 rispetto alla medesima sfera S è

$$\psi = 0\,;$$

facendo la trasformazione T_{mh}, la equazione (25) diverrà

$$(26)\qquad a_1^2\,(\mathrm{senh}\mu + i\,\mathrm{sen}\nu)^2 = A\theta + 2a_1 B\psi i\,.$$

Ora la sfera β imagine del piano F_1 passa per il punto m e per la circonferenza s. Dunque se denotiamo con (ξ, η, ζ) le coordinate di m nel sistema di assi (x, y, z), la equazione della sfera β sarà

$$(27)\qquad \psi = \zeta\,(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) - z(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - a^2) = 0\,.$$

La sfera α imagine di α_1 passerà anch'essa per la circonferenza s, e poichè la sua imagine α_1 incontra ad angolo retto il piano F_1 imagine di β, intersecherà ortogonalmente la sfera β. Quindi la sua equazione sarà

$$(28)\quad \theta = (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - a^2) + 4a^2 z\zeta.$$

Se nella equazione (25) facciamo una trasformazione di assi coordinati passando dal sistema (x_1, y_1, z_1) al sistema (x, y, z), se (x', y', z') sono le nuove coordinate del punto e_1, λ_1, λ_2, λ_3 sono i coseni degli angoli che l'asse z_1 fa con i tre nuovi assi, p la distanza della nuova origine O dal piano F_1, e x_0, y_0, z_0 le nuove coordinate della primitiva origine O, avremo

$$(29)\quad a_1^2 (\mathrm{senh}\mu_1 + i\,\mathrm{sen}\nu_1)^2 = (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 - \\ - a_1^2 + 2a_1 i\,(\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' - p)\,.$$

Facendo la trasformazione T_{mh}, cioè effettuando nella equazione (26) la sostituzione

$$(30)\; x = \xi + \frac{h^2}{r'^2}(x' - \xi)\,,\quad y = \eta + \frac{h^2}{r'^2}(y' - \eta)\,,\quad z = \zeta + \frac{h^2}{r'^2}(z' - \zeta)\,,$$

dove

$$r'^2 = (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2\,,$$

otterremo evidentemente la equazione (29). Dunque denotando con A_1, θ_1, B_1, ψ_1 ciò che rispettivamente divengono A, θ, B, ψ per la sostituzione (30), avremo

$$(31)\quad \begin{aligned} A_1\theta_1 &= (x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2 - a_1^2\,, \\ B_1\psi_1 &= \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' - p\,. \end{aligned}$$

Ma effettuando la sostituzione (30) nell'equazioni (27) e (28), e ponendo

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = k^2\,,\quad \delta^4 = (k^2 - a^2)^2 + 4a^2\zeta^2\,,$$

si ottiene

$$
\theta_1 = \frac{\delta^4}{r'^2}\left[\left(x' - \xi - \frac{h^2(k^2-a^2)}{\delta^4}\xi\right)^2 + \left(y' - \eta - \frac{h^2(k^2-a^2)\eta}{\delta^4}\right)^2 + \right.
$$

$$
(32) \qquad \left. + \left(z' - \zeta - \frac{h^2(k^2+a^2)\zeta}{\delta^4}\right)^2 - \frac{h^4 a^2}{\delta^4}\right],
$$

$$
\psi_1 = \frac{h^2\delta^2}{r'^2}\left(\frac{2\xi\zeta}{\delta^2}x' + \frac{2\eta\zeta}{\delta^2}y' + \frac{\zeta^2-\xi^2-\eta^2+a^2}{\delta^2}z' - \frac{k^2+a^2-h^2}{\delta^2}\zeta\right).
$$

Confrontando l'equazioni (31) colle (32), si ricava

$$
A_1 = \frac{r'^2}{\delta^4}, \quad B_1 = \frac{r'^2}{h^2\delta^2},
$$

$$
(33) \qquad a_1 = \frac{h^2}{\delta^2}a, \quad x_0 = \xi\left(1 - \frac{h^2(k^2-a^2)}{\delta^4}\right),
$$

$$
y_0 = \eta\left(1 - \frac{h^2(k^2-a^2)}{\delta^4}\right), \quad z_0 = \zeta\left(1 - \frac{h^2(k^2+a^2)}{\delta^4}\right),
$$

$$
\lambda_1 = \frac{2\xi\zeta}{\delta^2}, \quad \lambda_2 = \frac{2\eta\zeta}{\delta^2}, \quad \lambda_3 = \frac{\zeta^2-\xi^2-\eta^2+a^2}{\delta^2}, \quad p = \frac{k^2+a^2-h^2}{\delta^2}\zeta.
$$

Facendo la sostituzione (30) in A_1, B_1, ponendo

$$
r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2
$$

avremo:

$$
(34) \qquad
\begin{aligned}
A &= \frac{h^4}{\delta^4 r^2} = \frac{a_1^2}{a^2}\,\frac{1}{r^2}, \\
B &= \frac{h^2}{\delta^2 r^2} = \frac{a_1}{a}\,\frac{1}{r^2}.
\end{aligned}
$$

e sostituendo i valori (34) nella equazione (26) otterremo

$$
a^2 r^2 (\mathrm{senh}\mu + i\,\mathrm{sen}\nu)^2 = \theta + 2a\psi i,
$$

e ponendo in questa i valori (27) e (28), si avrà finalmente la equazione trovata da *Lipschitz*:

$$
(35) \quad a^2 r^2 (\mathrm{senh}\mu + i\,\mathrm{sen}\nu)^2 = (x^2 + y^2 + (z-ai)^2)(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta + ai)^2)
$$

Siano ora u, v le coordinate ellittiche del punto e, ed α, β quelle del punto m nel sistema di ellissi e iperbole con i fuochi sopra la circonferenza s, sarà

$$(36)\qquad \begin{aligned} a^2(\operatorname{senh}u + i\operatorname{sen}v)^2 &= x^2 + y^2 + (z + ai)^2 ,\\ a^2(\operatorname{senh}\alpha + i\operatorname{sen}\beta)^2 &= \xi^2 + \eta^2 + (\zeta + ai)^2 , \end{aligned}$$

e la equazione (35) diverrà

$$\operatorname{senh}\mu + i\operatorname{sen}\nu = \frac{a}{r}(\operatorname{senh}u - i\operatorname{sen}v)(\operatorname{senh}\alpha + i\operatorname{sen}\beta) ,$$

dalla quale si ricava

$$(37)\qquad \begin{aligned} \operatorname{senh}\mu &= \frac{a}{r}(\operatorname{senh}\alpha\operatorname{senh}u + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}v) ,\\ \operatorname{sen}\nu &= \frac{a}{r}(\operatorname{sen}\beta\operatorname{senh}u - \operatorname{senh}\alpha\operatorname{sen}v) . \end{aligned}$$

Se il punto m è il centro di una sfera σ di raggio R, che passa per la circonferenza s, avremo

$$\xi = \eta = 0 ,\ \zeta = \pm\sqrt{R^2 - a^2} = \pm l ,$$

e si deve prendere il segno positivo o negativo secondo che il punto m è dalla parte positiva o negativa del piano xy. Se il raggio h della sfera σ è uguale ad R sarà,

$$\delta^2 = l^2 + a^2 = R^2 ,$$

e quindi dall'equazioni (33)

$$a_1 = a ,$$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 ,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0 ,\ \lambda_3 = 1 ,\ p = 0 .$$

Onde la circonferenza s_1 coincide colla sua imagine s. Essendo il punto e_1 l'imagine del punto e rispetto a σ denotando con u', v' le coordinate ellittiche di e_1, con u, v quelle di e e con r la distanza di m da e, avremo

$$r(\operatorname{senh}u' + i\operatorname{sen}v') = (\operatorname{senh}u - i\operatorname{sen}v)(\pm l + ai) :$$

onde

$$(38)\qquad \begin{aligned} \operatorname{senh} u' &= \frac{a \operatorname{sen} v \pm l \operatorname{senh} u}{r}, \\ \operatorname{sen} v' &= \frac{a \operatorname{senh} u \mp l \operatorname{sen} v}{r}. \end{aligned}$$

Premessi questi teoremi passiamo alla determinazione della funzione potenziale V della elettricità indotta sopra la callotta sferica K in comunicazione colla terra da un punto m in cui è concentrata una massa di elettricità negativa uguale alla unità.

La funzione V sarà la funzione potenziale della superficie K, la quale sopra K sodisfarà alla equazione

$$V + \frac{1}{r} = 0,$$

dove r denota la distanza del punto m dal punto e a cui il valore di V si riferisce.

Cominciamo dal considerare il caso in cui il punto m è esterno alla sfera σ della quale è parte la callotta K. Siano C il centro ed R il raggio di σ, a il raggio della circonferenza s contorno di K. Imaginiamo un'altra sfera σ_1 che abbia il centro nel punto m e il raggio h uguale alla lunghezza delle tangenti condotte da m alla sfera σ; le due sfere σ e σ_1 si taglieranno ad angolo retto e quindi denotando con g la distanza dei centri C ed m, avremo

$$(39)\qquad h^2 = g^2 - R^2.$$

Poichè la sfera σ è imagine di sè stessa rispetto alla sfera σ_1, la callotta K_1, imagine di K rispetto a σ_1, sarà parte anch'essa di σ, e la circonferenza s_1 contorno di K_1, la quale è imagine della circonferenza s, sarà pure situata sopra σ.

La funzione potenziale Q_1 della callotta K_1, che sopra K_1 è uguale alla unità, sarà nel punto e

$$Q_1 = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctang} \frac{1}{\operatorname{senh} \mu_1} + \frac{R}{r_0} \operatorname{arctang} \frac{-1}{\operatorname{senh} \mu_1'}\right),$$

dove μ_1' è il valore di μ_1 nel punto e' imagine di e rispetto a σ, ed r_0 è la distanza del punto e dal punto C.

Per il teorema secondo del §. XIX. del Cap. I, se denotiamo con μ, μ', r_0' i valori rispettivi di μ_1, μ_1', r_0 nel punto e_1 imagine di e rispetto a σ_1, la funzione

$$(40)\quad V = -\frac{1}{\pi r}\left(\text{arctang}\,\frac{1}{\text{senh}\mu} + \frac{R}{r_0'}\,\text{arctang} - \frac{1}{\text{senh}\mu'}\right),$$

sarà la funzione potenziale della superficie K che sopra K è uguale ad $\frac{1}{r}$. Infatti, la quantità tra parentesi è il valore di πQ_1 nel punto e_1 imagine di e. Ora quando e si trova sopra K la sua imagine e_1 si trova sopra K_1, e la quantità tra parentesi è uguale a π, e quindi

$$V = -\frac{1}{r}.$$

Abbiamo precedentemente dimostrato che i valori di μ_1 e di μ'_1, nel punto e_1 imagine di e rispetto a σ_1 sono dati dall'equazioni

$$(41)\qquad \text{senh}\mu = \frac{a}{r}(\text{senh}p\,\text{senh}u + \text{sen}q\,\text{sen}v),$$

$$(42)\qquad \text{senh}\mu' = \frac{a}{r'}(\text{senh}p\,\text{senh}u' + \text{sen}q\,\text{sen}v'),$$

dove u e v sono le coordinate ellittiche del punto e, u' e v' quelle del punto e' imagine di e rispetto alla sfera σ, e p e q quelle del punto m tutte prese nel sistema che ha i fuochi sulla circonferenza s di raggio a.

Essendo e ed e' imagini reciproche rispetto alla sfera σ che passa per la circonferenza s, avremo dall'equazioni (38)

$$(43)\qquad \begin{aligned} r_0\text{senh}u' &= a\text{sen}v - l\text{senh}u,\\ r_0\text{sen}v' &= a\text{senh}u + l\text{sen}v,\end{aligned}$$

e denotando con p' e q' le coordinate ellittiche del punto m_1' imagine di m rispetto a σ, anche

$$
(44)\qquad \begin{aligned} g\,\mathrm{senh}p' &= a\,\mathrm{sen}q - l\,\mathrm{senh}p\,, \\ g\,\mathrm{sen}q' &= a\,\mathrm{senh}p + l\,\mathrm{sen}q\,. \end{aligned}
$$

Sostituendo nella equazione (42) i valori (43) ed osservando le relazioni (44), otterremo

$$
(45)\qquad \mathrm{senh}\mu' = \frac{ag}{r_0 r'}(\mathrm{senh}p'\,\mathrm{senh}u + \mathrm{sen}q'\,\mathrm{sen}v)\,.
$$

Ora i punti m ed e' sono rispettivamente imagini di m' ed e rispetto a σ. Dunque avremo per un teorema noto

$$
me' = \frac{m'e}{Cm'\,.\,Ce}\mathrm{R}^2 = \frac{m'e\,.\,Cm}{Ce}\,.
$$

Onde denotando con r_1 la distanza di m' dal punto e,

$$
r_0 r' = g r_1\,,
$$

e la equazione (45) diverrà

$$
(46)\qquad \mathrm{senh}\mu' = \frac{a}{r_1}(\mathrm{senh}p'\,\mathrm{senh}u + \mathrm{sen}q'\,\mathrm{sen}v)\,.
$$

Essendo poi C ed e_1 imagini rispettive di m' e di e rispetto a σ_1 avremo

$$
Ce_1 = \frac{m'e_1}{mm'\,.\,me}h^2 = \frac{m'e\,.\,Cm}{me}\,.
$$

ossia

$$
(47)\qquad rr'_0 = g r_1
$$

Sostituendo nella equazione (40) i valori (41), (46) e (47) e ponendo

$$
(48)\qquad \begin{aligned} \tau &= a(\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u + \mathrm{sen}q\,\mathrm{sen}v)\,, \\ \tau_1 &= a(\mathrm{senh}p'\,\mathrm{senh}u + \mathrm{sen}q'\,\mathrm{sen}v)\,, \end{aligned}
$$

avremo finalmente

$$(49)\qquad V=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{r}\operatorname{arctang}\frac{r}{\tau}+\frac{R}{gr_1}\operatorname{arctang}\frac{r_1}{\tau_1}\right),$$

e per il teorema secondo del §. XIX. del Cap. I. la densità ρ_1 della elettricità indotta sopra K si otterrà dalla densità ρ che deve aversi sopra K_1 affinchè la funzione potenziale vi sia uguale alla unità, e che è data dalla formula (18), e avremo

$$(50)\qquad \rho_1=\frac{g^2-R^2}{r^3}\rho=-\frac{g^2-R^2}{2\pi^2 Rr^3}\left(\frac{r}{\tau}+\operatorname{arctang}\frac{\tau}{r}\right),$$

Se il punto m è interno alla sfera σ della quale è parte la callotta K, sara esterno a σ il punto m' imagine di m rispetto a σ, e si potranno condurre da m' tangenti alla sfera σ, costruire uno sfera σ_1 di centro m' e con un raggio h di lunghezza uguale alla lunghezza di queste tangenti, e se g' denota la distanza di m' da C avremo

$$g^2=g'^2-R^2=\frac{R^2}{g^2}(R^2-g^2).$$

La funzione

$$Q_1=\frac{R}{\pi g}\left(\operatorname{arctang}\frac{1}{\operatorname{senh}\mu_1}+\frac{R}{r_0}\operatorname{arctang}\frac{1}{\operatorname{senh}\mu_1'}\right),$$

sarà la funzione potenziale della callotta K_1, che sopra K_1 è uguale ad $\frac{R}{g}$. Quindi si dimostra come precedentemente che la funzione

$$(51)\qquad V=-\frac{R}{\pi g}\left(\frac{1}{r_1}\operatorname{arctang}\frac{r_1}{\tau_1}+\frac{R}{g'r}\operatorname{arctang}-\frac{r}{\tau}\right),$$

sopra la callotta K sodisfa alla equazione

$$V=-\frac{R}{gr_1}=-\frac{1}{r},$$

ed è la funzione potenziale della elettricità indotta sopra K dal punto m. La equazione (51) può scriversi anche

$$(52)\qquad V = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{r}\operatorname{arctang}\frac{r}{\tau} + \frac{R}{gr_1}\operatorname{arctang}\frac{r_1}{\tau_1}\right).$$

La densità ρ_1 sarà data dalla equazione

$$(53)\quad \rho_1 = \frac{R}{g^2 r_1^3}(R^2 - g^2)\rho = -\frac{g^2 - R^2}{2\pi^2 R r^3}\left(\frac{r}{\tau} + \operatorname{arctang}\frac{\tau}{r}\right).$$

Se il punto m è situato sopra la sfera σ imagineremo una sfera σ_1 che abbia il centro in m e per raggio $2R$. La imagine K_1 di K sarà un circolo situato in un piano tangente a σ. La funzione potenziale Q_1 del circolo K_1 che sopra K è uguale all'unità sarà

$$Q_1 = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctang}\frac{1}{\operatorname{senh}\mu_1},$$

e la funzione

$$V = -\frac{2}{\pi r}\operatorname{arctang}\frac{r}{\tau},$$

sodisfarà sopra K la equazione

$$V = -\frac{1}{r}$$

La densità ρ_1 sarà

$$(54)\qquad \rho_1 = \frac{4R^2}{r^3}\rho.$$

Dalla equazione (8) del §. XIII di questo Capitolo abbiamo per la densità ρ dei punti del circolo K_1

$$\rho = -\frac{1}{2\pi^2 a_1\sqrt{1 - \dfrac{x_1^2 + y_1^2}{a_1^2}}} = -\frac{1}{2\pi^2 a_1 \operatorname{sen}\nu}.$$

Dalla terza delle equazioni (33), essendo

$$\delta^4 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - a^2)^2 + 4a^2\zeta^2 = 4\zeta^2 R^2,\ h^2 = 4R^2,$$

si ricava

$$a_1 = \frac{2Ra}{\zeta},$$

e dalla (35) osservando le relazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = \pm 2z\sqrt{R^2 - a^2},$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - a^2 = \pm 2\zeta\sqrt{R^2 - a^2},$$
$$\mathrm{senh}\mu = 0,$$

si deduce

$$a\,\mathrm{sen}\nu = \frac{R\sqrt{z\zeta}}{r}.$$

Onde

$$\rho = -\frac{r}{4\pi^2 R^2}\sqrt{\frac{\zeta}{z}}.$$

Denotando con d, δ e k le rispettive distanze del punto $(0, 0, l)$ dal punto (x, y, z), dal punto (ξ, η, ζ) e dal punto $(0, a, 0)$, abbiamo

$$2Rz = k^2 - d^2,$$
$$2R\zeta = \delta^2 - k^2,$$

e quindi

$$\rho = -\frac{r}{4\pi^2 R^2}\sqrt{\frac{\delta^2 - k^2}{k^2 - d^2}},$$

e sostituendo nella equazione (54) avremo finalmente la densità ρ_1 espressa sotto la forma con cui fu trovata da *W. Thomson*, cioè

$$\rho_1 = -\frac{1}{\pi^2 r^2}\sqrt{\frac{\delta^2 - k^2}{k^2 - d^2}}.$$

Le quantità $a\,\mathrm{senh}u$ ed $a\,\mathrm{sen}v$ che compariscono in τ e in τ_1 sono le lunghezze dei semiassi minore ed imaginario dell'ellisse e dell'iperbola omofocali che determinano il punto e al quale i valori di τ e di τ_1 si riferiscono, e quindi sono sempre numeri positivi. Ora la circonferenza s sopra cui si trovano i fuochi divide il piano F di questa circonferenza in due parti: una F' interna ed una F″ esterna ad s; e sopra F′ abbiamo $u = 0$, sopra F″ invece $v = 0$. La callotta K e le superficie piane F′ ed F″ dividono tutto lo spazio in tre parti: una S che da una parte termina alla superficie convessa di K e al piano F″, e dall'altra si estende all'infinito; una S′ che non contiene K, e si estende dal piano F all'infinito, e un'altra S″ limitata da F′ e dalla superficie concava di K. Quando il punto e passa dallo spazio S nello spazio S′ attraversa F″ e quindi v passa per zero. Se v non cangiasse segno, avremmo

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial (-z)},$$

essendo z normale al piano F. Dunque le derivate di v e quindi di τ, di τ_1 e di V offrirebbero una discontinuità nell'attraversare F″. Ma le derivate della funzione potenziale V devono essere continue attraverso F″, dunque in S′ dovremo prendere

$$\tau = a\,(\operatorname{senh} u \operatorname{senh} p - \operatorname{sen} q \operatorname{sen} v),$$

$$\tau_1 = a\,(\operatorname{senh} p' \operatorname{senh} u - \operatorname{sen} q' \operatorname{sen} v).$$

Per la stessa ragione nel passaggio del punto e dallo spazio S′ nello spazio S″, u dovrà mutare segno, e in S″ avremo

$$\tau = -a\,(\operatorname{senh} p \operatorname{senh} u + \operatorname{sen} q \operatorname{sen} v),$$

$$\tau_1 = -a\,(\operatorname{senh} p' \operatorname{senh} u + \operatorname{sen} q' \operatorname{sen} v).$$

La massa di elettricità indotta sopra la callotta sferica K in comunicazione colla terra da un punto m in cui è concentrata la unità di elettricità negativa si ottiene immediatamente per mezzo del seguente teorema generale:

La massa di elettricità indotta sopra una superficie chiusa σ in comunicazione colla terra da un punto m in cui è concentrata l'unità di elettricità negativa è uguale al valore che ha nel punto m la funzione potenziale di σ che sopra σ è uguale alla unità.

Infatti, se V′ è la funzione potenziale della elettricità indotta sopra σ dal punto m, V è la funzione potenziale di σ

che sopra σ è uguale all'unità, e denotiamo con p la normale a σ diretta verso l'esterno dello spazio racchiuso da σ, per il teorema di *Green*, avremo

$$\int_\sigma \left(V \frac{\partial V'}{\partial p} - V' \frac{\partial V}{\partial p} \right) d\sigma = 0 \, .$$

Ora denotando con ρ' la densità dell'elettricità indotta da m sopra σ, con ρ la densità della elettricità che ha V per funzione potenziale, e con r la distanza variabile dei punti di σ dal punto m, avremo sopra σ

$$V = 1 \, , \; V' = -\frac{1}{r} \, ,$$

$$\frac{\partial V'}{\partial p} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} = 4\pi\rho' \, , \; \frac{\partial V}{\partial p} = 4\pi\rho \, ,$$

e quindi

$$\int_\sigma \rho' d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma = -\int \frac{\rho d\sigma}{r} = V_m \, .$$

Ma essendo m un punto esterno allo spazio chiuso da σ si ha

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma = 0 \, .$$

Dunque la massa di elettricità indotta sopra σ sarà

$$\int_\sigma \rho' d\sigma = -V_m \, .$$

Le superficie aperte possono riguardarsi come superficie chiuse formate dalle loro facce opposte, e quindi anche per esse vale il teorema generale.

Applicando il teorema che abbiamo dimostrato alla callotta sferica K, avremo la massa E di elettricità indotta dal punto m espressa dall'equazioni (11) e (12) cioè

$$E = Q_m = \frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{arctang}\left(\pm\frac{1}{\operatorname{senh}\mu}\right) + \frac{R}{r}\operatorname{arctang}\left(\frac{\mp 1}{\operatorname{senh}\mu'}\right)\right),$$

ed il segno dipenderà dallo spazio in cui si trova il punto m.

La callotta sferica K si riduce al circolo F che ha per contorno la circonferenza s, quando non mutando il contorno s si fa crescere indefinitamente il raggio R della sfera σ della quale è parte K. Abbiamo al limite

$$\frac{R}{g} = 1\,,\ \frac{l}{g} = 1\,,\ \frac{a}{g} = 0\,;$$

onde dall'equazioni (44) si deduce

$$\operatorname{senh}p' = -\operatorname{senh}p\,,$$
$$\operatorname{sen}q' = \operatorname{sen}q$$

e la funzione potenziale V della elettricità indotta sopra il circolo F conduttore in comunicazione colla terra dal punto m in cui è concentrata una massa di elettricità negativa uguale alla unità sarà data dalla formula

$$V = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{r}\operatorname{arctang}\frac{r}{\tau} + \frac{1}{r_1}\operatorname{arctang}\frac{r_1}{\tau_1}\right), \tag{55}$$

dove

$$\tau = a(\operatorname{senh}p \operatorname{senh}u + \operatorname{sen}q \operatorname{sen}v)\,,$$
$$\tau_1 = -a(\operatorname{senh}p \operatorname{senh}u - \operatorname{sen}q \operatorname{sen}v)\,,$$

e il punto m' ha uguali alle coordinate corrispondenti del punto m le coordinate ξ, η, e di segno contrario la ζ. Onde

$$r_1^2 - r^2 = 4z\zeta = 4a^2 \operatorname{senh}u \operatorname{sen}v \operatorname{senh}p \operatorname{sen}q\,.$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore di $\frac{r}{\tau}$ per $4a\operatorname{senh}p \operatorname{senh}u$ ed osservando la precedente relazione, avremo

$$\frac{r}{\tau} = \frac{4ar \operatorname{senh}p \operatorname{senh}u}{r_1^2 - r^2 + 4a^2 \operatorname{senh}^2 p \operatorname{senh}^2 u}\,,$$

e ponendo

$$\varphi = \frac{r_1 + r}{2}, \ \psi = \frac{r - r_1}{2},$$

onde

$$4\varphi\psi = -(r_1^2 - r^2), \ r = \varphi + \psi,$$

otterremo

$$\frac{r}{\tau} = \frac{a(\varphi + \psi)\,\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u}{a^2\mathrm{senh}^2p\,\mathrm{senh}^2u - \varphi\psi},$$

e quindi

$$(56) \quad \arctan g\frac{r}{\tau} = \arctan g\frac{\varphi}{a\,\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u} + \arctan g\frac{\psi}{a\,\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u}.$$

Analogamente si trova

$$(57) \quad \arctan g\frac{r_1}{\tau_1} = \arctan g\frac{\varphi}{a\,\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u} - \arctan g\frac{\psi}{a\,\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u}.$$

Sostituendo i valori (56) e (57) nella equazione (55) si ottiene

$$V = -\frac{2}{\pi r r_1}\left\{\varphi \arctan g\frac{\varphi}{a\,\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u} - \psi \arctan g\frac{\psi}{a\,\mathrm{senh}p\,\mathrm{senh}u}\right\}.$$

Poichè al limite per $R = \infty$

$$\frac{g + R}{R} = 2, \ g - R = \pm\zeta,$$

avremo dalla formula (50)

$$\rho = \frac{\zeta}{\pi^2 r^3}\left(\frac{r}{\tau} + \arctan g\frac{\tau}{r}\right).$$

Ma sopra la superficie di F

$$a\,\mathrm{sen}v = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\mathrm{senh}u = 0,$$

e quindi

$$\frac{r}{\tau} = \frac{r}{a\,\mathrm{sen}q\,\mathrm{sen}v} = \frac{r}{\mathrm{sen}q\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Dunque la densità della elettricità indotta sul disco sarà

$$\rho = \frac{\zeta}{\pi^2 r^3}\left(\frac{r}{\operatorname{sen} q \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} + \operatorname{arctang} \frac{\operatorname{sen} q \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{r}\right),$$

dove $\operatorname{sen} q$ è la radice positiva e reale della equazione

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\cos^2 q} - \frac{\zeta^2}{\operatorname{sen}^2 q} = a^2 .$$

§. XV.

Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra due cilindri conduttori indefiniti che hanno le generatrici parallele.

Siano due conduttori cilindrici indefiniti C e C′ che abbiano le generatrici parallele all'asse delle z, e denotiamo con s ed s' rispettivamente i contorni delle sezioni rette fatte in C ed in C′ dal piano xy. Se comunichiamo al conduttore C′ isolato una massa di elettricità, e poniamo l'altro conduttore C in comunicazione colla terra, la funzione potenziale V di tutta l'elettricità in equilibrio sopra i due conduttori sarà uguale a zero sopra C, e ad una costante che potremo prendere uguale a π, sopra C′, determinando convenientemente la massa di elettricità comunicata a C′. Poichè i valori estremi di V si trovano sopra C e C′ e all'infinito, come abbiamo dimostrato nel §. XXI del Cap. I, in tutto lo spazio S esterno ai conduttori, avremo

(1) $$0 < V < \pi .$$

Se denotiamo con U la funzione che è costante sopra ciascuna linea di forza, per ciò che abbiamo dimostrato nel §. XXIII. del Cap. I, sarà

(2) $$x + iy = f(U + iV),$$

essendo f una funzione che determina per ogni sistema di valori di U e V, per i quali è verificata la disuguaglianza (1) un sol sistema di valori delle coordinate x ed y di un punto della porzione F_1 del piano xy esterna alle sezioni dei due conduttori C e C'. Se U e V rappresentano le coordinate di un altro piano UV, la equazione (2) darà la rappresentazione conforme, cioè simile nelle parti infinitesime, della striscia indefinita F compresa tra le rette $V = 0$ e $V = \pi$ sopra la porzione F_1 del piano xy, la quale avrà per contorno le due linee s ed s' che rappresenteranno rispettivamente le due linee $V = 0$ e $V = \pi$ che formano il contorno della striscia F.

Denotiamo con ρ e ρ' rispettivamente le densità elettriche sopra s ed s'. Avremo denotando con p e p' le normali ad s e ad s' dirette verso l'esterno

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 4\pi\rho\,, \quad \frac{\partial V}{\partial p'} = 4\pi\rho'\,.$$

Ora essendo V crescente quando ci allontaniamo in F_1 dalla linea s, e decrescente quando ci allontaniamo in F_1 da s', avremo

$$\frac{\partial V}{\partial p} > 0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial p'} < 0\,,$$

e quindi la carica di C è tutta positiva, quella di C' tutta negativa ed avremo

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \sqrt{\Delta V}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial p'} = -\sqrt{\Delta V}\,.$$

Differenziando la equazione (2) abbiamo

$$dx + i dy = f'(U + iV)\,(dU + i dV)\,,$$

onde

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \operatorname{Mod} f'(U + iV)\sqrt{dU^2 + dV^2}\,.$$

Derivando la equazione (2) rapporto ad x, si ottiene

$$f'(U + iV) = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial x} - i\dfrac{\partial V}{\partial x}}{\dfrac{\partial U^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial V^2}{\partial x^2}}$$

ed osservando le note relazioni

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}\,,$$

se ne deduce

$$f(U+iV)=\frac{\partial V}{\partial y}\frac{1}{\Delta V}-i\frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{\Delta V}\,, \tag{3}$$

e quindi

$$\text{Mod}\, f(U+iV)=\frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\,,$$

$$ds=\frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\sqrt{dU^2+dV^2}\,.$$

L'elemento della linea s sopra cui $dV=0$, e $\sqrt{\Delta V}=4\pi\rho$ sarà

$$ds=\frac{dU}{4\pi\rho}\,,$$

l'elemento della linea s' sopra la quale $dV=0$, $\sqrt{\Delta V}=-4\pi\rho'$ sarà

$$ds'=-\frac{dU}{4\pi\rho'}\,.$$

Quindi per la massa E di elettricità contenuta sopra C tra i piani $z=0$ e $z=n$ e tra le generatrici corrispondenti ai valori U_1 ed U_2 di U ed a $V=0$ avremo

$$E=\frac{1}{4\pi}\int_0^n dz\int_{U_1}^{U_2} dU=\frac{n}{4\pi}(U_2-U_1)\,, \tag{4}$$

e per la massa E′ di elettricità contenuta sopra C′ tra i medesimi piani, e le generatrici corrispondenti ai medesimi valori di U e a $V=\pi$

$$E'=-\frac{n}{4\pi}(U_2-U_1)\,. \tag{5}$$

Se i due conduttori C e C' sono due lastre piane parallele indefinite in tutte le direzioni, il contorno s della sezione retta di C sarà composto di due rette parallele indefinite l ed l_1 e il contorno s' della sezione retta di C' sarà composto da altre due rette parallele l' ed l_1'. Supponiamo l_1 ed l_1' comprese tra l ed l', e la distanza di l'_1 da l_1 uguale ad a.

Prendiamo l_1 per asse delle y; l'equazione di l'_1 sarà $x = a$. Essendo $V = 0$ sopra C e $V = \pi$ sopra C', la funzione potenziale V nello spazio S compreso tra l_1 ed l'_1 sarà

$$V = \frac{\pi}{a} x ,$$

e quindi tanto sopra l_1 quanto sopra l_1'

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\pi}{a} .$$

Lo spazio S' che si estende da l' all'infinito ha per contorno la superficie l' che è una sfera di raggio infinito; lo spazio S_0 che si estende da l all'infinito ha per contorno l che è una sfera di raggio infinito; quindi V che è costante sopra l e sopra l' sarà costante anche in S' ed in S_0 e sopra l e sopra l' avremo

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 .$$

Supponiamo ora che i conduttori C e C' siano due lastre parallele terminate da una sola parte, e che i contorni s ed s' delle sezioni rette fatte in esse dal piano xy siano composte ciascuna di due rette parallele riunite da una curva convessa verso lo spazio esterno ai conduttori. Denotiamo con l ed l_1 le parti rettilinee, e con m la parte curvilinea di s, con l' ed l_1' le parti rettilinee e con m' la parte curvilinea di s', ed l_1 ed l_1' siano comprese tra l ed l'. Del resto lasciamo per ora indeterminata la forma delle curve m ad m'. Prendiamo per asse negativo delle y la retta l e per origine il punto e dove termina l e comincia m. La distribuzione dell'elettricità sopra due porzioni di questi conduttori si avvicinerà tanto più a quella sopra le due lastre indefinite precedentemente considerate, quanto più queste porzioni saranno lontane dall'origine. Quindi coll'allontanarsi dall'origine sopra l ed l' la funzione $\frac{\partial V}{\partial x}$ convergerà a zero e sopra l_1 ed l_1' convergerà a $\frac{\pi}{a}$ se a è la distanza di l_1' da l_1.

Allontanandosi da m verso lo spazio F_1 la funzione V è crescente, allontanandosi da m' verso F_1 è decrescente e poichè m volge la convessità verso F_1 tanto nell'un caso quanto nell'altro y è crescente. Avremo dunque V crescente con y nei punti di m e decrescente col crescere di y in quelli di m', e in conseguenza sopra m

$$\frac{\partial V}{\partial y} > 0\,;$$

e sopra m'

$$\frac{\partial V}{\partial y} < 0\,.$$

Se poniamo

$$\xi = \frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{1}{\Delta V}\,,\quad \eta = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{1}{\Delta V}\,, \tag{9}$$

la equazione (3) diviene

$$\xi + i\eta = f'(U + iV)\,, \tag{10}$$

e questa darà un altra rappresentazione conforme della striscia F del piano UV sopra una porzione F' del piano $\xi\eta$. Essendo la striscia F una rappresentazione conforme di F' data dall'equazione (2), la rappresentazione della F' sopra F_1 data dall'equazioni (9) sarà anch'essa conforme.

Il contorno di F' sarà la rappresentazione delle due linee lml_1 ed $l'm'l_1'$. Determiniamone la forma.

Denotiamo con e il punto ove termina l e comincia m, con e_1 quello ove termina m ed incomincia l_1, con e' il punto ove terminà l' ed incomincia m' e con e_1' quello in cui termina m_1' e comincia l_1'; le linee e i punti corrispondenti del contorno di F' denotiamole con le lettere greche con i medesimi apici, cioè la porzione corrispondente ad l con λ, quella corrispondente ad m con μ, e così di seguito, il punto corrispondente ad e con ε, quello corrispondente ad e' con ε' e così di seguito.

Sopra le rette l ed l' abbiamo

$$\xi = \frac{\partial V}{\partial y} = 0\,,$$

e $\frac{\partial V}{\partial x}$ sempre positiva e decrescente fino a zero. Quindi le porzioni λ e λ' corrispondenti del contorno di F' saranno le parti dell'asse positivo delle η estese dai punti ε ed ε' all'infinito; sopra m la coordinata $\xi = \frac{\partial V}{\partial y}$ va dal valore zero al valore zero mantenendosi sempre positiva, mentre $\frac{\partial V}{\partial x}$ dall'essere negativa passa ad essere positiva. Dunque la parte μ del contorno di F' è una curva che conservandosi nella parte positiva delle ξ, va dal punto ε al punto ε_1 che si trova sulla parte negativa delle η. Sopra l_1 abbiamo $\xi = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial x}$ convergente al valore $\frac{\pi}{a}$, dunque denotando con ε_0 il punto dell'asse delle η in cui $\eta = -\frac{a}{\pi}$, la linea λ_1 sarà una porzione dell'asse negativo delle η compresa tra i punti ε_1 ed ε_0. Sopra m' abbiamo $\xi = \frac{\partial V}{\partial y}$ sempre negativo, e quindi μ' sarà una curva che va dal punto ε' al punto ε_1' dalla parte negativa delle ξ, e finalmente essendo sopra l_1' la $\xi = 0$, e $\frac{\partial V}{\partial x}$ positivo e convergente a $\frac{\pi}{a}$, sara λ'_1 una porzione dell'asse negativo delle η che va da ε_1 ad ε_0. Ai punti all'infinito di F_1 corrisponderanno i punti all'infinito di F', poichè all'infinito

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0\,.$$

La determinazione della funzione f' e quindi di f è ridotta ora alla risoluzione del problema: trovare la rappresentazione conforme di F' sopra la striscia F. Nel caso che i punti ε ed ε' coincidano, i punti ε_1 ed ε_1' cadano in ε_0 e che la curva $\mu\mu'$ sia una circonferenza, questo problema si trova risoluto nelle *Vorlesungen über Mathematische Physik* di *Kirchhoff* dove espone e generalizza un metodo di *Helmholtz* per trattare alcuni problemi del moto permanente dei fluidi. Prendiamo una funzione un poco più generale di quella ivi data, e verifichiamola.

Sia

$$(11)\quad \xi+i\eta=f'(U+iV)=i\left(be^{-2U-2Vi}+c+ge^{-U-Vi}\sqrt{e^{-2U-2Vi}-1}\right),$$

dove b, c e g sono costanti reali.

Il secondo membro sarà una funzione monodroma della variabile complessa $U+Vi$, se escludiamo dal campo F di questa i due punti di diramazione del radicale che vi comparisce, cioè il punto $U=V=0$ e il punto $U=0$, $V=\pi$. Sopra la linea $V=0$ prendiamo il segno del radicale positivo per $U<0$, il segno negativo per $U>0$, e sopra la linea $V=\pi$ il segno del radicale negativo per U negativo il segno positivo per U positivo. Così i valori di ξ e di η sul contorno $\lambda\mu\mu_1\lambda_1$ di F' corrisponderanno ai valori di U e V del contorno di F nel modo seguente:

$$(12)\quad \begin{array}{ll}
V=0, & \begin{array}{lll} U<0,\ \xi=0 & , & \eta=be^{-2U}+c+ge^{-U}\sqrt{e^{-2U}-1} \\ U>0,\ \xi=ge^{-U}\sqrt{1-e^{-2U}} & , & \eta=be^{-2U}+c \end{array} \\
V=\pi & \begin{array}{lll} U<0,\ \xi=0 & , & \eta=be^{-2U}+c+ge^{-U}\sqrt{e^{-2U}-1} \\ U>0,\ \xi=-ge^{-U}\sqrt{1-e^{-2U}} & , & \eta=be^{-2U}+c \end{array}
\end{array}$$

Per $U = \infty$ deve essere

$$\eta = -\frac{a}{\pi},$$

quindi

(13) $$c = -\frac{a}{\pi}.$$

Per $U = -\infty$ deve essere

$$\eta = +\infty,$$

onde

(14) $$b + g > 0.$$

Integrando l'equazione (11) colla condizione che al punto $U = V = 0$ corrisponda il punto $x = y = 0$ ed osservando la equazione (2) avremo

(15) $$x + iy = -\frac{i}{2}\Big[b(e^{-2U-2Vi} - 1) - 2c(U + Vi) + ge^{-U-Vi}\sqrt{e^{-2U-2Vi} - 1} - g\log\Big(e^{-U-Vi} + \sqrt{e^{-2U-2Vi} - 1}\Big)\Big],$$

dove i segni del radicale sono determinati come precedentemente.

Quando $U < 0$ poniamo

(16) $$e^{-U} = \cosh u,$$

e se $U > 0$

(17) $$e^{-U} = \cos v.$$

I valori di x e di y sopra il contorno lml_1 di F_1 corrisponderanno ai valori di U e di V nel modo seguente

(18) $$V=0 \quad \begin{cases} U < 0, \; x = 0, & y = -\frac{1}{2}(b\,\mathrm{senh}^2 u - 2cU + g(\mathrm{senh}\,u\cosh u - u)), \\ U > 0, \; x = \frac{g}{2}(v - \mathrm{sen}\,v\cos v), & y = \frac{1}{2}(b\,\mathrm{sen}^2 v + 2cU), \end{cases}$$

e sopra il contorno $l'm'l'_1$ avremo

$$(19)\ V=\pi \quad \begin{cases} U<0\,,\ x=(g-2c)\frac{\pi}{2}\,,\ y=-\frac{1}{2}(b\,\mathrm{senh}^2 u-2cU+g(\mathrm{senh}u\cosh u-u)), \\ U>0\,,\ x=(g-2c)\frac{\pi}{2}-\frac{g}{2}(v-\mathrm{sen}v\cos v),\ \ y=\frac{1}{2}(b\,\mathrm{sen}^2 v+2cU)\,. \end{cases}$$

Il massimo valore di x sopra lml_1 dà la grossezza h della lastra. Ora dalle (17) si deduce che questo valore massimo corrisponde ad $U=\infty\,,\ v=\frac{\pi}{2}$, quindi

$$h=\frac{g\pi}{4}\,,$$

ed abbiamo

$$(20)\qquad g=\frac{4h}{\pi}\,.$$

Per ottenere la distanza a cui si estendono dalla parte positiva dell'asse delle y le due lastre dovremo determinare il massimo valore di y sui due contorni.

Denotando con v_0 il valore di v corrispondente a questo massimo, cioè al vertice di m, differenziando il secondo membro della quarta dell'equazioni (18) e ponendo mente alla (17), avremo

$$b\cos^2 v_0+c=0\,;$$

onde osservando la equazione (13) e ponendo

$$(21)\qquad b=-qc=\frac{qa}{\pi}\,,$$

si deduce

$$(22)\qquad \cos v_0=\frac{1}{\sqrt{q}}\,.$$

Sostituendo i valori (12) e (21) nell'equazioni (18) e (19), avremo sopra l:

$$(23)\ \ x=0\ \ ,\qquad y=-\frac{a}{2\pi}(q\,\mathrm{senh}^2 u+2U)-\frac{2h}{\pi}(\mathrm{senh}u\cosh u-u)\,,$$

sopra m:

$$(24) \qquad x=\frac{2h}{\pi}(v-\operatorname{sen}v\cos v)\,,\quad y=\frac{a}{2\pi}(q\operatorname{sen}^2 v-2\mathrm{U})\,,$$

sopra l':

$$(25)\quad x=a+2h\qquad,\quad y=-\frac{2\pi}{a}(q\operatorname{senh}^2 u+2\mathrm{U})-\frac{2h}{\pi}(\operatorname{senh}u\cosh u-u),$$

e sopra m':

$$(26)\quad x=a+2h-\frac{2h}{\pi}(v-\operatorname{sen}v\cos v),\quad y=\frac{a}{2\pi}(q\operatorname{sen}^2 v-2\mathrm{U})\,.$$

Quindi i contorni di s e di s' sono uguali.

Se denotiamo con x_0, y_0 le coordinate del vertice di m, osservando la equazione (22) avremo dalle (24)

$$(27)\quad x_0=\frac{2h}{\pi}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{q}}-\frac{\sqrt{q-1}}{q}\right),\quad y_0=\frac{a}{2\pi}\left(q-1-\log q\right).$$

L'asse della linea lm, cioè quella retta che a una distanza grande sufficientemente dal vertice di m, si trova a ugual distanza da l e da m ha per equazione

$$x=\frac{h}{2}\,.$$

Affinchè questa retta passi per il vertice di m si dovrà prendere per q il valore determinato dalla equazione che si ottiene ponendo nella prima delle (27):

$$x_0=\frac{h}{2}\,.$$

Onde avremo

$$\frac{\pi}{4}=\arccos\frac{1}{\sqrt{q}}-\frac{\sqrt{q-1}}{q}\,.$$

Ponendo

$$\cos\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{q}}\,,$$

si ottiene

$$\frac{\sqrt{q-1}}{q}=\frac{1}{2}\cos 2\omega\ ,$$

e quindi per determinare q si hanno le due equazioni

$$\cos 2\omega = 2\omega\ ,$$

$$q=\frac{2}{1-\operatorname{sen}2\omega}\ .$$

Dalla prima si ricava

$$2\omega = 0\ ,\ 7391 = 42^0\ 21'\ 50''\ ,$$

e sostituendo questo valore nella seconda si ottiene finalmente

(28) $$q = 6\ ,\ 135\ldots$$

La densità elettrica ρ sopra i due conduttori è data da

$$4\pi\rho=\sqrt{\Delta V}=\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\ .$$

Dall'equazioni della seconda linea delle (12) nelle quali sono sostituiti per i coefficienti i valori (13), (20) e (21) si ricava

$$\xi^2+\eta^2=\frac{a^2}{\pi^2}\,(q\cos^2 v-1)^2+\frac{4^2h^2}{\pi^2}\operatorname{sen}^2 v\cos^2 v\ .$$

Il secondo membro sarà costante quando sia

$$q=2\ ,\ a=2h$$

e abbiamo allora

$$\rho=\frac{1}{4a}\ .$$

La massa E, di elettricità contenuta sopra la porzione della lastra C compresa tra i due piani $z=0$ e $z=n$, e tra la generatrice corrispondente al valore $-y_1$ di y sopra m, e quella che passa per l'origine, si otterrà dall'equazione (4) osservando che il limite inferiore di U in questo caso è zero, per cui chiamando U_1 il valore corrispondente al limite superiore si avrà

$$E_1 = \frac{n}{4\pi} U_1 .$$

Sostituendo ad U_1 il valore dato dalla seconda dell' equazioni (24) avremo

$$E_1 = \frac{n}{4a} y_1 + \frac{qn}{8\pi} \operatorname{sen}^2 v .$$

Se y_1 e quindi anche U_1 è sufficientemente grande, v_1 sarà uguale approssimativamente a $\frac{\pi}{2}$ e quindi

(29) $$E_1 = \frac{n}{4a} y_1 + \frac{qn}{8\pi} .$$

Ma dalla seconda dell'equazioni (27) abbiamo

(30) $$0 = \frac{n}{4a} y_0 - \frac{n}{8\pi}(q-1) + \frac{n}{8\pi} \log q .$$

Sommando l'equazioni (29) e (30) otterremo

$$E_1 = \frac{n}{4a}\left(y_1 + y_0 + \frac{a}{2\pi}(1 + \log q)\right),$$

e denotando con A l'area del piano yz compresa tra i piani $z = 0$ e $z = n$, e i piani $y = -y_1$, $y = y_0 + \frac{a}{2\pi}(1 + \log q)$, avremo

$$E_1 = \frac{1}{4a} A .$$

La massa di elettricità contenuta sopra la porzione della lastra C compresa tra i piani $z = 0$ e $z = n$, la generatrice che sopra l_1 corrisponde ad $y = -y_1$, e la generatrice che passa per l'origine, risulta dalla seconda equazione (23) molto piccola in confronto alla massa E_1. Ripetendo lo stesso ragionamento per la seconda lastra, si troverebbe che la massa E_2 di elettricità distribuita sull'area determinata dagli stessi piani è $= -E_1$. Abbiamo quindi il seguente teorema.

Se due lastre uguali parallele terminate soltanto a un piano M normale ad ambedue sono cariche di elettricità in modo che sopra una la funzione potenziale sia uguale a π e sopra l'altra sia zero, le masse di elettricità che si troveranno sopra le due porzioni di esse comprese tra il piano M un piano M' parallelo ad M e due piani N e N' paralleli tra loro, normali ad M ed alle facce delle lastre, saranno uguali e di segno contrario, ed uguali rispettivamente a quelle che si avrebbero sopra le due lastre quando si prolungassero indefinitamente in tutte le direzioni, si conservassero uguali sopra loro i valori della funzione potenziale e se ne considerassero soltanto le porzioni comprese tra i due piani N ed N', il piano M' ed un altro piano parallelo ad M che si trovasse distante da M di una lunghezza

$$\frac{a}{2\pi}(1 + \log q) .$$

§. XVI.

Condensatori.

Un condensatore è formato da due strati di materia conduttrice separati da uno strato sottilissimo di materia coibente. Se lo strato coibente è una lastra piana il condensatore sarà una *Tavola di Franklin*, se è la parete di una bottiglia sarà la *Bottiglia di Leyda.*

Siano K e K' i due strati conduttori, C lo strato coibente, σ e σ' rispettivamente le superficie di K e di K' che sono in contatto con C, e σ_1 e σ_1' le rimanenti superficie di questi strati. Denotiamo con γ e γ' le rispettive capacità elettriche di K e di K' e con γ_1 il coefficiente d'induzione, cioè la massa di elettricità che si trova sopra uno dei due conduttori quando sopra esso la funzione potenziale è uguale a zero e sopra l'altro è uguale alla unità. Se comunichiamo rispettivamente ai due conduttori K e K' le masse elettriche E ed E', la funzione potenziale V di questa elettricità in equilibrio sopra i due conduttori sarà uguale a una costante h sopra K e ad una costante h' sopra K', e per ciò che abbiamo dimostrato nel §. III. di questo Capitolo avremo

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{E} = h\gamma + h'\gamma_1 ,$$

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{E}' = h\gamma_1 + h'\gamma' .$$

Se denotiamo con P il potenziale, per ciò che abbiamo esposto nel §. IV. di questo Capitolo, sarà

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{P} = \frac{1}{2}(\gamma h^2 + 2\gamma_1 hh' + \gamma' h'^2) .$$

Se le superficie σ e σ' sono chiuse, e σ' è contenuta nello spazio racchiuso da σ, ponendo in comunicazione fra loro i conduttori K e K', e caricandoli di tanta elettricità che si abbia

$$h = h' = 1 ,$$

sopra σ' l'elettricità libera sarà uguale a zero, e sopra σ_1 avremo la quantità di elettricità γ_0 che sarebbe sopra σ_1 se non esistesse σ' nel suo interno e sopra σ_1 fosse $h = 1$. Quindi l'equazioni (1) e (2) daranno

$$\gamma_0 = \gamma + \gamma_1 , \quad 0 = \gamma_1 + \gamma' ;$$

onde

$$\text{(4)} \qquad \gamma_1 = -\gamma' , \quad \gamma - \gamma' = \gamma_0 .$$

Se la superficie σ è superficie di livello rispetto alla funzione potenziale Q' che sopra σ' è uguale alla unità sarà facile determinare γ. Infatti, se denotiamo con Q_1' il valore costante che questa funzione Q' prende sopra la superficie di livello σ, la funzione

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{Q}' - 1}{\mathrm{Q}'_1 - 1} ,$$

sarà uguale a zero sopra σ' ed uguale all'unità sopra σ, e darà la funzione potenziale nello spazio racchiuso tra σ e σ' della elettricità che si trova sopra queste superficie. Quindi se γ' denota la capacità elettrica di σ' quando non vi è σ, cioè ponendo

$$\gamma'_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'} \frac{\partial Q'}{\partial p}\, d\sigma' ,$$

la massa di elettricità γ_1 che si troverà sopra σ' in comunicazione colla terra quando la funzione potenziale sopra σ è uguale all'unità, sarà

$$(5) \qquad \gamma_1 = -\gamma' = \frac{\gamma_0'}{Q_1' - 1} ,$$

e sostituendo nella seconda dell'equazioni (4) avremo

$$(6) \qquad \gamma = \gamma_0 - \frac{\gamma_0'}{Q_1' - 1} .$$

Supponiamo ora che le superficie σ', σ e σ_1 siano ellissoidi omofocali. Se denotiamo con a', b', c' i semiassi di σ', con c e c_1 rispettivamente i semiassi minori di σ e di σ_1, ponendo

$$l^2 = a'^2 - c'^2 , \quad k^2 = \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2 - c'^2} ,$$

avremo dalle formule (11) del §, XII di questo Capitolo, osservando che γ_0 è il valore di M quando $V_i = 1$

$$\gamma_0 = -\frac{l}{\operatorname{amtg}\frac{l}{c_1}} , \quad \gamma_0' = -\frac{l}{\operatorname{amtg}\frac{l}{c'}} ,$$

$$Q_1' = \frac{\operatorname{amtg}\frac{l}{c}}{\operatorname{amtg}\frac{l}{c'}} ,$$

essendo k il modulo delle funzioni ellittiche.

Sostituendo i valori trovati nell'equazioni (5) e (6) otterremo

$$\gamma_1 = -\gamma' = -\frac{l}{\operatorname{amtg}\frac{l}{c} - \operatorname{amtg}\frac{l}{c'}} ,$$

$$\gamma = -l\left(\frac{1}{\operatorname{amtg}\frac{l}{c_1}} - \frac{1}{\operatorname{amtg}\frac{l}{c} - \operatorname{amtg}\frac{l}{c'}}\right) .$$

Se $a' = b'$ cioè se l'ellissoidi sono di rivoluzione il modulo k diviene uguale a zero e la funzione *amtg* diviene *arctang*; se $b'=c'$ cioè se l'ellissoidi sono di rivoluzione intorno all'asse maggiore, il modulo k diviene uguale all'unità e quindi la funzione *amtg* diviene una funzione logaritmica. Se abbiamo $a' = b' = c' = \mathrm{R}'$, $c = \mathrm{R}$ e $c_1 = \mathrm{R}_1$, cioè se l'ellissoidi sono sfere concentriche, avremo $l = 0$ e quindi

$$\gamma_1 = -\gamma' = \frac{\mathrm{RR}'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}\,,\ \gamma = -\left(\mathrm{R}_1 + \frac{\mathrm{RR}'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}\right).$$

In quest'ultimo caso se non vi fosse lo strato K' e sopra K la funzione potenziale fosse uguale all'unità la massa E_0 di elettricità sopra K sarebbe

$$\mathrm{E}_0 = -\mathrm{R}_1\,.$$

Se invece vi è anche lo strato K' e questi è in comunicazione colla terra, la massa E di elettricità che dovrà trovarsi sopra K affinchè la funzione potenziale vi sia uguale all'unità, sarà

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0\left(1 + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_1}\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}\right).$$

L'energia: — P, cioè il lavoro meccanico che si potrà produrre colla scarica del condensatore si otterrà dall'equazione (3) ponendovi $h = 1$, $h' = 0$, e avremo

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\mathrm{R}_1\left(1 + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_1}\,\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}-\mathrm{R}'}\right).$$

Supponiamo ora che le superficie σ e σ' degli strati conduttori K e K' le quali sono in contatto collo strato coibente C non siano chiuse; la superficie σ_1 sarà una continuazione della superficie σ e formerà con σ l'intero contorno di K, e σ'_1 sarà una continuazione di σ' e formerà con σ' l'intero contorno di K'.

Supponiamo inoltre che le superficie σ e σ' siano i luoghi geometrici dell'estremità delle normali inalzate sopra una superficie s e prolungate di una lunghezza costante ed uguale a $\frac{1}{2}g$ dalle due parti opposte di s.

Siano comunicate ai due strati isolati K e K' tali masse di elettricità, che la loro funzione potenziale sia uguale ad h sopra K e ad h' sopra K'. Cominciamo dal determinare le densità elettriche sopra le superficie σ e σ'.

Se μ e μ' sono i punti nei quali la normale in un punto m della superficie s incontra rispettivamente le due superficie σ e σ', poichè V è una funzione a cui nello spazio non occupato da massa può applicarsi il teorema di *Taylor*, avremo rispettivamente nei punti μ' e μ

$$(7)\qquad \begin{aligned} h' &= h + g\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_0 + \frac{g^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_0 + \cdots \\ h &= h' - g\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)' + \frac{g^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)' + \cdots \end{aligned}$$

dove coll'indice zero denotiamo i valori nel punto μ, e coll'apice quelli nel punto μ'.

Prendendo ora per origine delle coordinate cartesiane il punto m, per asse delle z la normale $\mu\mu'$, e per assi delle x e delle y le tangenti alle due linee di curvatura di s nel punto m, ed osservando che nello spazio esterno ai conduttori è: $\Delta^2 V = 0$, avremo

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_0 = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

La superficie σ è una superficie di livello, e l'asse delle z è normale a σ nel punto μ; dunque in questo punto sarà

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0\,,$$

il valore di V nel punto di σ di coordinate $\left(dx\,,\ 0\,,\ -\frac{1}{2}g + dz\right)$ sarà uguale a quello che ha nel punto di coordinate $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}g\right)$, e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial z}\,dz + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{dx^2}{2} = 0\,.$$

Ora la retta condotta per μ parallelamente all'asse delle x è tangente a una linea di curvatura di σ, e se denotiamo con R_0 il raggio di curvatura corrispondente, il quale sarà intrinsecamente positivo o negativo secondo che la linea di curvatura volgerà nel punto μ la convessità o la concavità verso la regione delle z positive, avremo

$$dz = -\frac{dx^2}{2R_0},$$

onde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{R_0}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Denotando con R_0' l'altro raggio di curvatura di σ nel punto μ, otterremo analogamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{R'_0}\frac{\partial V}{\partial z},$$

e quindi l'equazione (8) diverrà

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_0 = -\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R'_0}\right). \tag{9}$$

Se denotiamo con R_1 ed R_1' i raggi di curvatura di σ' nel punto μ', avremo analogamente

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)' = -\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)'\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'_1}\right). \tag{10}$$

Sostituendo nell'equazione (7) i valori (9) e (10) ed osservando che si ha

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_0 = 4\pi\rho,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)' = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)' = -4\pi\rho',$$

otterremo

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
h' - h &= 4\pi\rho g\left(1 - \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_0} + \frac{1}{\mathrm{R}'_0}\right)\right) + \dots \\
h - h' &= 4\pi\rho' g\left(1 + \frac{g}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}'_1}\right)\right) + \dots
\end{aligned}
$$

Se la grossezza g dello strato coibente C è molto piccola in confronto alle dimensioni delle superficie σ e σ', potremo limitare le serie che formano i secondi membri delle (11) ai soli termini che abbiamo scritto; e denotando con R ed R' i raggi di curvatura di s nel punto m, sarà

$$
\mathrm{R}_0 = \mathrm{R} - \frac{g}{2}, \quad \mathrm{R}'_0 = \mathrm{R}' - \frac{g}{2},
$$

$$
\mathrm{R}_1 = \mathrm{R} + \frac{g}{2}, \quad \mathrm{R}'_1 = \mathrm{R}' + \frac{g}{2},
$$

e nei limiti di approssimazione a cui ci arrestiamo, potremo sostituire nei termini moltiplicati per g^2, ad R_0, R_0' e ad R_1, R_1' le quantità corrispondenti R ed R', e ponendo

$$
\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}'} = \tau,
$$

avremo dalle (11)

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
\rho &= \frac{h' - h}{4\pi g}\left(1 + \frac{g\tau}{2}\right), \\
\rho' &= -\frac{h' - h}{4\pi g}\left(1 - \frac{g\tau}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Ora se denotiamo rispettivamente con du_0, dv_0; du', dv', du, dv gli elementi delle linee di curvatura nei punti corrispondenti μ, μ' ed m delle superficie σ, σ' ed s, abbiamo

$$
du_0 : du' : du = \mathrm{R} - \frac{g}{2} : \mathrm{R} + \frac{g}{2} : \mathrm{R},
$$

$$
dv_0 : dv' : dv = \mathrm{R}' - \frac{g}{2} : \mathrm{R}' + \frac{g}{2} : \mathrm{R}';
$$

onde

$$du_0 = du\left(1 - \frac{g}{2R}\right), \quad du' = du\left(1 + \frac{g}{2R}\right),$$

$$dv_0 = dv\left(1 - \frac{g}{2R'}\right), \quad dv' = dv\left(1 + \frac{g}{2R'}\right),$$

dalle quali moltiplicando si deduce

$$(13) \qquad d\sigma = ds\left(1 - \frac{g\tau}{2}\right), \quad d\sigma' = ds\left(1 + \frac{g\tau}{2}\right).$$

Moltiplicando rispettivamente le (12) per le (13) otterremo

$$\rho d\sigma = \frac{h' - h}{4\pi g}\left(1 - \frac{g^2\tau^2}{4}\right) ds.$$

$$\rho' d\sigma' = -\frac{h' - h}{4\pi g}\left(1 - \frac{g^2\tau^2}{4}\right) ds,$$

Onde

$$(14) \qquad \rho' d\sigma' = -\rho d\sigma,$$

e nei limiti d'approssimazione stabiliti

$$\rho' d\sigma' = -\rho d\sigma = -\frac{h' - h}{4\pi g} ds,$$

e quando sia $h = 1$, $h' = -1$, avremo

$$(15) \qquad \rho' d\sigma' = -\rho d\sigma = \frac{ds}{2\pi g}.$$

Se denotiamo con v la funzione potenziale della elettricità distribuita sopra le superficie σ e σ' colle densità determinate dall'equazione (15), e con r_0, r' ed r rispettivamente le distanze dei punti μ, μ' ed m dal punto e a cui il valore di v si riferisce, avremo

$$(16) \qquad v = \frac{1}{2\pi g}\int_s ds\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'}\right).$$

Se le distanze del punto e dai punti m della superficie sono tutte maggiori di $\frac{1}{2}g$, come è per i punti di σ_1 e di σ_1', sarà in serie convergente in ugual grado

$$\frac{1}{r_0}=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n g^n}{2^n.1.2.3\ldots n}\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial p^n},$$

$$\frac{1}{r_1}=\sum_0^\infty \frac{g^n}{2^n.1.2.3\ldots n}\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial p^n},$$

onde

$$\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}=-\sum_0^\infty \frac{g^{2n+1}}{2^{2n}.1.2.3\ldots(2n+1)}\frac{\partial^{2n+1} \frac{1}{r}}{\partial p^{2n+1}}.$$

Sostituendo questo valore nella equazione (16), poichè a questa serie può applicarsi l'integrazione, avremo

$$\text{(17)} \qquad V=-\frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty \frac{g^{2n}}{2^{2n}.1.2.3\ldots(2n+1)}\int_s \frac{\partial^{2n+1}\frac{1}{r}}{\partial p^{2n+1}}ds.$$

Denotando con ω la grandezza apparente della superficie s veduta dal punto e, abbiamo per il primo termine

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p}ds=-\frac{\omega}{2\pi}.$$

Determiniamo l'ordine di grandezza degli altri, limitandoci al caso della *Tavola di Franklin* e della *Bottiglia di Leyda*.

Nella Tavola di Franklin la superficie s è piana, e possiamo prendere l'asse delle z normale ad s. Poniamo

$$U_{2n+1}=\frac{\partial^{2n+1}\frac{1}{r}}{\partial p^{2n+1}}=\frac{\partial^{2n+1}\frac{1}{r}}{\partial z^{2n+1}}=\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial z^2}.$$

Nell'intorno di s avremo la funzione U_{2n-1} e le sue derivate finite e continue e sarà sodisfatta l'equazione: $\Delta^2 U_{2n+1} = 0$, quindi per un teorema noto, se rappresentiamo con η il contorno di s, sarà

$$\int_s U_{2n+1}\, ds = -\int\int\left(\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial y^2}\right) dx dy =$$

$$= \int_\eta \left(\frac{\partial U_{2n-1}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial U_{2n-1}}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) d\eta\,.$$

Ma dalla teoria delle funzioni di *Legendre*, abbiamo

$$\frac{\partial U_{2n-1}}{\partial x} = \frac{\partial^{2n}\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z^{2n-1}} = \frac{X_{2n}}{r^{2n+1}}$$

$$\frac{\partial U_{2n-1}}{\partial y} = \frac{\partial^{2n}\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z^{2n-1}} = \frac{Y_{2n}}{r^{2n+1}}$$

dove X_{2n} e Y_{2n} sono due funzioni sferiche; quindi

$$\int_s U_{2n+1}\, ds = \int\left(X_{2n}\frac{\partial y}{\partial \eta} - Y_{2n}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\frac{d\eta}{r^{2n+1}}\,.$$

Denotando con r_1 la minima distanza del punto e dal contorno η avremo

$$\int_s U_{2n+1}\, ds = \frac{A_{2n+1}}{r_1^{\,2n+1}}\,,$$

ed A_{2n+1} sarà una quantità dell'ordine della dimensione di η.

Nella bottiglia di Leyda la superficie s è un cilindro circolare retto, e il contorno η è formato dalle circonferenze delle basi. Prendiamo l'asse del cilindro per asse delle z, e poniamo

$$x = t\cos\theta\,,\quad y = t\,\mathrm{sen}\theta.$$

Avremo

$$U_{2n+1} = \frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial t^2} = \frac{\partial U_{2n}}{\partial t}.$$

La equazione $\Delta^2 U_{2n-1} = 0$ in questo caso diviene.

$$\frac{\partial t \dfrac{\partial U_{2n-1}}{\partial t}}{\partial t} = -t\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial z^2} - \frac{1}{t}\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial \theta^2}.$$

Denotando con R il raggio delle basi del cilindro, sopra la superficie s sarà

$$RU_{2n+1} + U_{2n} = -R\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial z^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial \theta^2},$$

$$ds = R dz d\theta.$$

Onde

$$R\int U_{2n+1} ds + \int U_{2n} ds = -R^2 \int\int \left(\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 U_{2n-1}}{\partial \theta^2}\right) dz\, d\theta =$$

$$= R^2 \int_\eta \left(\frac{\partial U_{2n-1}}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial U_{2n-1}}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) d\eta.$$

Osservando che si ha

$$\frac{\partial U_{2n-1}}{\partial z} = \frac{P_{2n}}{r_1^{2n+1}},\quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0,$$

otterremo

$$R\int_s U_{2n+1}\, ds + \int_s U_{2n}\, ds = R^2 \int \frac{P_{2n}}{r^{2n+1}}\, d\eta = \frac{RB_{2n-1}}{r_1^{2n+1}},$$

essendo B_{2n-1} una quantità dell'ordine di grandezza di R.

Avremo dunque le seguenti equazioni:

$$R\int_s U_{2n+2}\,ds+\int_s U_{2n}\quad ds=\frac{RB_{2n-1}}{r_1^{\,2n+1}}\,,$$

$$R\int_s U_{2n}\quad ds+\int_s U_{2n-1}\,ds=\frac{RB_{2n-1}}{r_1^{\,2n}}\,,$$

$$\begin{array}{cccccc} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{array}$$

$$R\int_s U_2\quad ds+\int_s U_1\quad ds=\frac{RB_0}{r_1^{\,2}}\qquad,$$

dalle quali osservando che si ha

$$\int_s U_1 ds=\omega\,,$$

si ricava

$$\int_s U_{2n+1}\,ds=\frac{1}{r_1^{\,2n+1}}\left[\omega r_1\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2n}-\sum_0^{2n-1}(-1)^s B_s\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2n-s-1}\right]=\frac{A_{2n+1}}{r_1^{\,2n+1}}$$

Dunque tanto nel caso della Tavola di Franklin quanto in quello della Bottiglia di Leyda la equazione (17) darà

$$v=-\frac{\omega}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)}\left(\frac{g}{2r_1}\right)^{2n}\frac{A_{2n+1}}{r_1}\,,$$

dove A_{2n+1} è una quantità dell'ordine di grandezza delle dimensioni del contorno. Onde il secondo termine è già di terzo ordine rispetto al primo e quindi trascurabile nei limiti di approssimazione che ci siamo assegnati. Avremo dunque

$$v=-\frac{\omega}{2\pi}\;; \tag{18}$$

e nei punti distanti dalla superficie s più di $\frac{1}{2}g$, la funzione potenziale dell'elettricità, data dall'equazioni (15) sopra σ e σ', sarà uguale alla funzione di un doppio strato omogeneo disteso sopra s.

Denotando con w la funzione potenziale della elettricità in equilibrio che si troverà sopra σ_1 e σ_1', dovremo avere sopra σ_1

$$V_0 = w_0 + v_0 = 1 ,$$

e sopra σ_1':

$$V' = w' + v' = -1 .$$

Se σ_1 e σ_1' sono i luoghi geometrici dell'estremità delle normali ad s prolungate dalle due parti di s, di una lunghezza costante uguale ad $\frac{1}{2}q$, e q è dello stesso ordine di grandezza di g, avremo

$$v_0 = 1 - \frac{1}{4\pi} q \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_0 + \ldots$$

$$v' = -1 + \frac{1}{4\pi} q \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_0 + \ldots$$

Dalle formule (8) del § XII. del Cap. I, si ricava

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\eta \frac{\operatorname{sen}(rt)\cos(pn)}{r^2}\, d\eta = \frac{a_1}{r_1} ,$$

dove a_1 è dell'ordine delle dimensioni del contorno η. Dovrà dunque essere sopra σ_1

$$w_0 = \frac{q a_1}{r_1} , \tag{19}$$

e sopra σ'_1

$$w' = -\frac{q a_1}{r_1} . \tag{20}$$

Ora se uniamo σ_1 e σ'_1 mediante una superficie σ_2 che avrà una dimensione dell'ordine di grandezza di g, avremo una superficie chiusa τ, e potremo determinare una funzione potenziale che sopra le parti σ_1 e σ'_1 di τ abbia i valori dati dall'equazioni (19) e (20) e sopra σ_2 valori che si attaccano con continuità ai precedenti. Essendo tutti questi valori dell'ordine di grandezza del rapporto di g ad r in tutta la superficie τ, fuori che in un tratto vicino al contorno η la cui estensione è dell'ordine di grandezza di g, sarà w una funzione di quest'ordine di grandezza, e dello stesso ordine sarà la densità sopra σ_1 e σ_1', e quindi nei limiti di approssimazione assegnati trascurabile rispetto alla densità della elettricità di σ e σ' che è dell'ordine di grandezza di $\frac{1}{g}$.

Per calcolare le masse E ed E' dell'elettricità di K e di K' quando $h = 1$, $h' = -1$, basterà dunque tener conto soltanto di quella che si trova sopra le superficie σ e σ', e dall'equazioni (15) e (12) avremo

$$E' = \int_{\sigma'} \rho' d\sigma' = \frac{s}{2\pi g} = \gamma_1 - \gamma',$$

$$E = \int_{\sigma} \rho d\sigma = -\frac{s}{2\pi g} = \gamma - \gamma_1,$$

onde

$$\gamma = \gamma', \quad \gamma_1 - \gamma = \frac{s}{2\pi g}.$$

Sia ora γ_0 la capacità del conduttore τ che sarà uguale approssimativamente alla capacità dei due conduttori K e K' quando sopra ambidue sia $h = h' = 1$. Sommando l'equazioni (1) e (2) avremo

$$\gamma_0 = \gamma_0 + 2\gamma_1 + \gamma' = 2(\gamma + \gamma_1),$$

e quindi

$$\gamma_1 + \gamma = \frac{1}{2}\gamma_0,$$

$$\gamma_1 - \gamma = \frac{s}{2\pi g},$$

dalle quali si ricava

$$\gamma = \gamma' = \frac{\gamma_0 \pi g - s}{4\pi g},$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_0 \pi g + s}{4\pi g},$$

e per l'energia potenziale — P dall'equazione (3) avremo

$$P = \frac{s(h - h')^2 - \pi g \gamma_0 (h + h')^2}{8\pi g}.$$

Nel caso della Tavola di Franklin, quando s sia un circolo di raggio R abbiamo trovato nel §. XIII di questo Capitolo

$$\gamma_0 = -\frac{2R}{\pi},$$

ed è

$$s = \pi R^2;$$

avremo quindi

$$-P = \frac{\pi R^2 (h - h')^2 + 2gR(h + h')^2}{8\pi g}.$$

CAPITOLO TERZO

MAGNETISMO

---

§. I.

Ipotesi fondamentale.

Per ispiegare i fenomeni magnetici supponiamo, co[illegible] i fenomeni elettrici, che in ogni corpo magnetico esistano due fluidi imponderabili uno chiamato magnetismo *boreale* l' altro magnetismo *australe;* che gli elementi di uno stesso fluido si respingano, che gli elementi di due fluidi differenti si attraggano tra loro secondo la legge di *Newton*; che la intensità della forza con cui due elementi di uno stesso fluido si respingono sia uguale alla intensità della forza con cui si attraggono due elementi di fluidi differenti, di masse uguali ai precedenti, e situati alla stessa distanza. Prendiamo per unità di massa la quantità di fluido che concentrata in un elemento ds di spazio esercita una forza di ripulsione uguale alla unità, sopra un uguale quantità di fluido concentrata nell'elemento ds' di spazio che si trova a una distanza da ds uguale all'unità. Per unità di forza conviene prendere quella che agendo per l'unità di tempo sopra un punto in cui è concentrata una massa di materia ponderabile uguale alla unità, le comunica una velocità da fargli percorrere l' unità di spazio nell'unità di tempo. Riguarderemo positiva la densità del fluido boreale e negativa quella del fluido australe e quindi come per l'elettricità l'azione di masse qualunque di fluido boreale e australe sopra un punto e in cui è concentrata l'unità di massa di fluido boreale, avrà una funzione potenziale

$$V = -\int \frac{\rho ds}{r}.$$

Il fluido boreale è quello che è attratto dal polo australe della terra.

Uno dei più comuni fenomeni magnetici non troverebbe però la spiegazione con questa sola ipotesi. Infatti in ogni punto della superficie terrestre esiste una forza che agisce sopra i corpi magnetici, e la direzione e la intensità di questa forza è costante in tutto uno spazio, le cui dimensioni sono dello stesso ordine di grandezza dei corpi magnetici che noi sottoponiamo alla nostra osservazione. Denotiamo con H la componente orizzontale di questa forza e sospendiamo il corpo magnetico per il suo centro di gravità per distruggere l'azione di questa sopra il medesimo; la forza con cui il centro di gravità del corpo sarà sollecitato a prendere un moto progressivo orizzontale sarà:

$$\int H\rho ds = H\int \rho ds.$$

Ora in queste condizioni il centro di gravità rimane sempre in quiete; soltanto il corpo prende un moto rotatorio. Dunque

$$\int \rho ds = 0,$$

cioè la massa di fluido boreale è uguale sempre a quella di fluido australe in ogni corpo magnetico, per quanto piccolo sia. Dunque è necessario supporre che i due fluidi non possano muoversi altro che negli elementi dei corpi, e quindi ammettere che un corpo magnetico sia un aggregato di elementi nei quali i due fluidi magnetici sono separati, e che si trovano isolati in uno spazio perfettamente coibente. Siano: s lo spazio infinitesimo occupato da un elemento magnetico, O un punto di s, e un punto che si trova alla distanza finita r dal punto O, m un punto di s ed l' la distanza infinitesima di m da O; α, β, γ i coseni degli angoli che il raggio vettore r fa cogli assi, α', β', γ' i coseni degli angoli che il raggio vettore l' fa cogli assi; ρ la densità del magnetismo nel punto m ed r' la distanza di m da e; la funzione potenziale v dell'elemento magnetico nel punto e avrà il valore

$$(1) \qquad v = -\int_s \frac{\rho ds}{r'},$$

ed avremo in serie convergente in ugual grado

$$\frac{1}{r'} = \sum_0^\infty \frac{l'^n}{r^{n+1}} P_n,$$

dove P_n è la funzione di *Legendre* di ordine n, e quindi

$$(2) \qquad v = -\sum_0^\infty \frac{l'^n}{r^{n+1}} \int_s P_n \rho ds.$$

Ora $P_0 = 1$ e per la nostra ipotesi

$$\int_s \rho ds = 0;$$

quindi il primo termine della serie è uguale a zero.

Abbiamo inoltre

$$P_1 = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

e quindi, denotando con x', y', z', le coordinate dei punti m

$$l' \int_s P_1 \rho ds = \alpha \int_s x' \rho ds + \beta \int_s y' \rho ds + \gamma \int_s z' \rho ds.$$

Ora se (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate del centro di gravità del fluido boreale e (x_1, y_1, z_1) quelle del centro di gravità del fluido australe, l è la distanza di questi due punti, a, b, c i coseni degli angoli che l fa cogli assi, μ la massa dell'uno dell'altro fluido, h il rapporto del volume del corpo supposto omogeneo allo spazio occupato dai suoi elementi magnetici, dS il volume dell' elemento magnetico moltiplicato per h ed M il rapporto di μl al volume dS, avremo

$$\int_s x'\rho ds = \mu (x_0 - x_1) = \mathrm{M}a dS,$$

$$\int_s y'\rho ds = \mu (y_0 - y_1) = \mathrm{M}b dS,$$

$$\int_s z'\rho ds = \mu (z_0 - z_1) = \mathrm{M}c dS.$$

Onde ponendo $\mathrm{M}a = \mathrm{A}$, $\mathrm{M}b = \mathrm{B}$, $\mathrm{M}c = \mathrm{C}$, otterremo

$$l' \int_s \mathrm{P}_1 \rho ds = (\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma) dS.$$

Essendo l' infinitesimo dovremo trascurare gli altri termini della serie (2); quindi la equazione (1) diviene

$$v = -\frac{(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma) dS}{r^2}, \tag{3}$$

ed anche, denotando con x', y', z' le coordinate del punto O,

$$v = -\left[\mathrm{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathrm{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathrm{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right] dS. \tag{4}$$

La retta l che unisce i centri di gravità dei due fluidi si chiama l'*asse magnetico* dell'elemento: il rapporto del prodotto della massa di uno dei due fluidi separati in un elemento magnetico per la lunghezza dell'asse magnetico al volume dell'elemento di spazio si chiama il *momento magnetico* dell'elemento, e i prodotti di questo momento per i coseni degli angoli che l'asse magnetico fa cogli assi coordinati, e che abbiamo denotato con A, B e C si dicono le *componenti* del momento magnetico secondo gli assi.

Per determinare il potenziale di un elemento magnetico sopra sè stesso è necessario di conoscere come vi sono distribuiti i fluidi magnetici separati. Supponendo l'elemento perfettamente conduttore del magnetismo, data la forza a cui è dovuta la magnetizzazione e la forma dell' elemento, si determina la distribuzione del magnetismo come quella della elettricità nei conduttori. Se per esempio, supponiamo che l'elemento sia una sfera di raggio R, ci troveremo nel caso trattato nel §. V. del Cap. II, quando si ponga $E=0$. Prendiamo la forza inducente costante in tutto lo spazio occupato dall'elemento; il che potremo fare in generale, attesa la piccolezza di questo spazio, e poniamo l'origine delle coordinate nel centro della sfera. La funzione potenziale U della forza inducente G, denotando con α, β, γ i coseni degli angoli che la direzione di G fa cogli assi, sarà

$$U = G(\alpha x + \beta y + \gamma z) ;$$

la densità ρ sarà data dalla equazione (3) del paragrafo citato, dove a cagione della (4) deve porsi $c=0$, ed avremo

$$\rho = \frac{3G}{4\pi R}(x\alpha + y\beta + z\gamma) .$$

Moltiplicando per $x d\sigma$, $y d\sigma$, $z d\sigma$, integrando, estendendo l'integrazioni a tutta la superficie σ della sfera, ed osservando che si ha

$$\int_\sigma x^2 d\sigma = \int_\sigma y^2 d\sigma = \int_\sigma z^2 d\sigma = \frac{4\pi}{3} R^4 ,$$

$$\int_\sigma xy d\sigma = \int_\sigma yz d\sigma = \int_\sigma zx d\sigma = 0 ,$$

otterremo

$$\int_\sigma x\rho d\sigma = \mathrm{GR}^3\alpha = \mathrm{A}d\mathrm{S}\,,$$

(5) $$\int_\sigma y\rho d\sigma = \mathrm{GR}^3\beta = \mathrm{B}d\mathrm{S}\,,$$

$$\int_\sigma z\rho d\sigma = \mathrm{GR}^3\gamma = \mathrm{C}d\mathrm{S}\,,$$

Dalla equazione (2) del paragrafo sopra citato, abbiamo

$$\mathrm{V}_i = -\mathrm{G}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,,$$

e quindi il potenziale p dell'elemento sopra sè stesso sarà

$$p = -\frac{1}{2}\mathrm{G}\left(\alpha\int_\sigma x\rho d\sigma + \beta\int_\sigma y\rho d\sigma + \gamma\int_\sigma z\rho d\sigma\right).$$

Sostituendo i valori (5) otterremo

(6) $$p = -\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{R}^3}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)d\mathrm{S}\,.$$

Supponiamo ora che l'elemento sia un'ellissoide σ con i semiassi a, b, c. Denotando con V la funzione potenziale dei fluidi magnetici separati nell'ellissoide σ sotto l'azione della forza inducente la cui funzione potenziale è uguale ad U, dovremo avere sopra la superficie σ e nello spazio interno

(7) $$\mathrm{V}_i = -\mathrm{G}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,,$$

e nello spazio esterno a σ sarà necessario e sufficiente che la funzione V sia finita e continua insieme colle sue derivate, si annulli all'infinito, e sodisfaccia alla equazione $\Delta^2\mathrm{V} = 0$. Queste condizioni sono verificate tutte dalla funzione

(8) $$\mathrm{V}_e = -\mathrm{G}\left(\frac{\alpha x}{h_1}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda + a^2)\mathrm{D}} + \frac{\beta y}{h_2}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda + b^2)\mathrm{D}} + \frac{\gamma z}{h_3}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda + c^2)\mathrm{D}}\right),$$

dove

$$D = \sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)(\lambda + c^2)}\,,$$

$$(9)\quad h_1 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda + a^2)D}\,,\quad h_2 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda + b^2)D}\,,\quad h_3 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda + c^2)D}\,,$$

e λ_1 è la radice positiva della equazione

$$\frac{x^2}{\lambda_1 + a^2} + \frac{y^2}{\lambda_1 + b^2} + \frac{z^2}{\lambda_1 + c^2} = 1\,.$$

La densità ρ del magnetismo sopra σ sarà data dall'equazione

$$(10)\qquad \rho = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_e}{\partial p} - \frac{\partial V_i}{\partial p}\right)_{\lambda=0}\,,$$

Dall'equazioni (8) e (7) per $\lambda = 0$, si deduce

$$\frac{\partial V_e}{\partial p} = -G\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial p} + \beta\frac{\partial y}{\partial p} + \gamma\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \frac{G}{abc}\left(\frac{\alpha x}{h_1 a^2} + \frac{\beta y}{h_2 b^2} + \frac{\gamma z}{h_3 c^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p}\,,$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial p} = -G\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial p} + \beta\frac{\partial y}{\partial p} + \gamma\frac{\partial z}{\partial p}\right),$$

sostituendo questi valori nella (10) si ottiene

$$\rho = \frac{G}{4\pi abc}\left(\frac{\alpha x}{h_1 a^2} + \frac{\beta y}{h_2 b^2} + \frac{\gamma z}{h_3 c^2}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p}\,,$$

ed osservando che per $\lambda = 0$ si hanno le relazioni

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}\,,$$

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\lambda}{\partial p} = 2\frac{\partial x}{\partial p}\,,\quad \frac{y}{b^2}\frac{\partial\lambda}{\partial p} = 2\frac{\partial y}{\partial p}\,,\quad \frac{z}{c^2}\frac{\partial\lambda}{\partial p} = 2\frac{\partial z}{\partial p}\,,$$

avremo

$$(11)\qquad \rho = \frac{G}{2\pi abc}\left(\frac{\alpha}{h_1}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\beta}{h_2}\frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\gamma}{h_3}\frac{\partial z}{\partial p}\right).$$

Moltiplicando la equazione (11) successivamente per $x d\sigma$, $y d\sigma$, $z d\sigma$, integrando, estendendo l'integrazioni a tutta la superficie σ ed osservando l'equazioni

$$\int_\sigma x\frac{\partial x}{\partial p}\,d\sigma = \int_\sigma y\frac{\partial y}{\partial p}\,d\sigma = \int_\sigma z\frac{\partial z}{\partial p}\,d\sigma = \frac{4}{3}\,\pi abc\,,$$

$$\int_\sigma x\frac{\partial y}{\partial p}\,d\sigma = \int_\sigma x\frac{\partial z}{\partial p}\,d\sigma = \int_\sigma y\frac{\partial z}{\partial p}\,d\sigma = \int_\sigma y\frac{\partial x}{\partial p}\,d\sigma =$$

$$= \int_\sigma z\frac{\partial x}{\partial p}\,d\sigma = \int_\sigma z\frac{\partial y}{\partial p}\,d\sigma = 0\,,$$

otterremo

$$\int_\sigma x\rho\, d\sigma = A\,dS = \frac{2}{3}\,G\,\frac{\alpha}{h_1}\,,$$

$$(12)\qquad \int_\sigma y\rho\, d\sigma = B\,dS = \frac{2}{3}\,G\,\frac{\beta}{h_2}\,,$$

$$\int_\sigma z\rho\, d\sigma = C\,dS = \frac{2}{3}\,G\,\frac{\gamma}{h_3}\,.$$

Il potenziale p del magnetismo dell'ellissoide sopra sè stesso sarà

$$p = \frac{1}{2}\int_\sigma V_1\rho\, d\sigma = -\frac{1}{2}\,G\,(\alpha A + \beta B + \gamma C)\,dS$$

Sostituendo in questa i valori di $G\alpha$, $G\beta$, $G\gamma$ dati dalle (12), avremo

$$p = -\frac{3dS}{4}\,(h_1 A^2 + h_2 B^2 + h_3 C^2)\,dS\,.$$

Denotando con h il rapporto dello spazio occupato dal corpo magnetico supposto omogeneo a quello occupato dagli elementi, si ha

$$dS = \frac{4h\pi}{3} abc ,$$

onde

(13) $$p = -\pi habc\,(h_1 A^2 + h_2 B^2 + h_3 C^2)\, dS .$$

Se $a = b = c = R$, cioè se l'ellissoide si riduce a una sfera, avremo dall'equazioni (9)

(15) $$h_1 = h_2 = h_3 = \frac{2}{3R^3} ,$$

e quindi

(14) $$p = -\frac{2}{3}\pi h(A^2 + B^2 + C^2)\, dS .$$

e questa equazione coincide colla (6) ponendovi

$$dS = \frac{4}{3}\pi h R^3 .$$

§. II.

Funzione potenziale di un corpo magnetico

Siano S lo spazio occupato da un corpo magnetico, σ la superficie che ne forma il contorno, e un punto in cui è concentrata l'unità di massa di fluido boreale, e le componenti A, B, C dei momenti magnetici degli elementi del corpo siano funzioni finite e continue delle coordinate, che ammettono le derivate prime. La funzione potenziale del corpo magnetico nel punto e sarà evidentemente la somma delle funzioni potenziali dei suoi elementi. Denotandola con V, ed osservando la (4) del paragrafo precedente, avremo dunque

(1) $$V = -\int_S \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS .$$

Per il teorema dimostrato nel §. VII. del Cap. I, otterremo immediatamente

$$(2)\qquad V=\int_\sigma (A\alpha+B\beta+C\gamma)\frac{d\sigma}{r}+\int_S\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{dS}{r},$$

dove α, β, γ sono i coseni degli angoli che fa cogli assi la normale a σ diretta verso l'interno dello spazio S.

Se μ è il momento magnetico, e (μp) l'angolo che l'asse magnetico fa colla normale, avremo

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=\mu\cos(\mu p),$$

e quindi la (2) diviene

$$(3)\qquad V=\int_\sigma \mu\cos(\mu p)\frac{d\sigma}{r}+\int_S\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{dS}{r}.$$

Dunque la funzione potenziale di un corpo magnetico si può esprimere per due funzioni potenziali: una di masse magnetiche a due dimensioni distese sopra σ e l'altra di masse magnetiche a tre dimensioni che occupano lo spazio S.

Se V_i è una funzione che sopra la superficie σ del corpo magnetico ha i valori uguali a quelli di V, in tutto lo spazio S occupato dal corpo è finita e continua insieme colle sue derivate prime e sodisfa alla equazione

$$\Delta^2 V_i=0,$$

per il teorema secondo del §. X. del Cap. I. la funzione V nello spazio esterno ad S rappresenterà anche la funzione potenziale di un sistema di masse magnetiche a due sole dimensioni distribuite sopra σ colla densità

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial p}-\frac{\partial V_i}{\partial p}\right),$$

dove p denota la normale a σ diretta verso lo spazio esterno ad S.

Passiamo a determinare la distribuzione delle forze colle quali il corpo magnetico attrae o respinge un punto e della sua superficie, nel quale sia concentrata l'unità di massa di fluido boreale.

La forza che agisce sopra il punto e potrà sempre decomporsi in due; una nella direzione della normale alla superficie condotta per il punto e e l'altra secondo una retta situata nel piano tangente a σ condotto per il medesimo punto e. Chiameremo la prima la forza normale, la seconda la forza tangenziale. Poichè il punto e può riguardarsi come un punto infinitamente vicino alla superficie σ e quindi situato nello spazio non occupato da massa, la componente della forza secondo una linea h si otterrà prendendo la derivata $\frac{\partial V}{\partial h}$, e queste derivate varieranno con continuità col movimento del punto e sulla superficie.

Chiamiamo *linea di livello* una linea di σ sopra la quale V ha un valore costante, e denotiamo con v la lunghezza di questa linea contata a partire da un punto fisso sopra la medesima; chiamiamo *linea di forza* una linea di σ che ha in ogni suo punto uguale alla direzione della forza tangenziale la direzione della tangente presa sempre nello stesso senso in cui si percorre tutta la linea senza mai retrocedere sopra di essa, e denotiamo con u la lunghezza di questa linea contata a partire da un punto fisso.

Sopra una linea di livello sarà sempre, essendo V costante,

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 0 .$$

Dunque la componente della forza tangenziale nella direzione della tangente a una linea di livello è sempre uguale a zero; e quindi la forza tangenziale è in ogni punto di una linea di livello diretta normalmente alla stessa linea di livello, e perciò le linee di forza taglieranno ortogonalmente le linee di livello, e questi due sistemi di linee divideranno la superficie σ in rettangoli infinitesimi.

La forza tangenziale lungo tutta una linea di forza ha sempre la direzione della tangente presa nel senso in cui si percorre la linea, o sempre in senso opposto, dunque il valore $\frac{\partial V}{\partial u}$ conserva sempre lo stesso segno sopra tutta una linea di forza.

Una linea di forza non può essere una linea chiusa. Infatti se fosse chiusa avremmo, essendo V funzione finita, continua e a un sol valore,

$$\int_u \frac{\partial V}{\partial u}\, du = 0\,;$$

equazione assurda perchè $\frac{\partial V}{\partial u}$ ha sempre lo stesso segno sopra la linea u.

Una linea di forza non può essere incontrata in due punti da una stessa linea di livello.

Infatti, l'integrale precedente sarebbe uguale a zero anche se prendessimo per u la porzione di linea u compresa tra i due punti nei quali essa incontra la linea di livello, il che è impossibile.

Dunque una linea di forza terminerà in due punti separati a e b, e ogni linea di livello che passa per un punto della linea ab dividerà la superficie σ in due parti in una delle quali sarà contenuto il punto a, nell'altra il punto b. Ora finchè la direzione della forza tangenziale varia con continuità la linea di forza può continuarsi; quindi nei punti a e b dovrebbe aversi una variazione finita nella direzione di questa forza, e quindi nelle derivate di V prese secondo linee situate nel piano si avrebbe una discontinuità, se non fossero uguali a zero. Ma queste derivate sono continue, dunque nei punti a e b dovranno essere uguali a zero e quindi anche la variazione prima della funzione V in questi punti dovrà essere uguale a zero, e per conseguenza il valore di V o è un massimo o un minimo, o è massimo in alcune direzioni, minimo in altre. Questi punti nei quali la forza è normale alla superficie si chiamano *poli*.

Se in un polo a il valore della funzione V è un massimo, nell'intorno di a avremo evidentemente con u crescente coll'allontanarsi da u,

$$\frac{\partial V}{\partial u} < 0\,.$$

Dunque il fluido boreale contenuto in e è attratto dal polo a e perciò un polo a in cui V ha un valore massimo si chiama un *polo australe*.

Se in un polo b la funzione V ha un valor minimo avremo invece nell'intorno di b

$$\frac{\partial V}{\partial u} > 0 ,$$

e quindi il fluido boreale concentrato in e sarà respinto dal polo b, e in conseguenza un polo b in cui V ha un valor minimo lo diremo un *polo boreale*.

Se in un polo c la funzione V è crescente in alcune direzioni descrescente in altre, anche $\frac{\partial V}{\partial u}$ sarà positiva in alcune, negativa in altre direzioni, quindi secondo che il punto e si trova in alcune o in altre regioni dell'intorno di c sarà attratto o respinto; perciò un tal polo lo chiameremo un *polo neutro*.

Poichè la somma algebrica delle masse magnetiche è sempre uguale a zero, i valori estremi della funzione V nello spazio esterno ad S, per il teorema 6°. del §. XXI. del Cap. I, dovranno trovarsi sopra σ. Quindi esisteranno sempre un punto a di massimo e uno b di minimo; dunque sempre almeno un polo australe e uno boreale.

Imaginiamo ora un sistema di curve C le quali vadano da un polo australe a_0 a un polo boreale b_0 senza mai incontrare sè stesse nè alcuna dell'altre curve del sistema, e per ogni punto di σ passi una di queste curve. Ciò sarà evidentemente sempre possibile se la superficie è semplicemente connessa, cioè se dopo aver fatto in essa un foro si può con trasformazione continua ridurre a un sol punto.

Percorrendo tutta quanta una curva C a partire dal polo a_0, la funzione V sarà descrescente tanto nell' intorno del punto di partenza, quanto nell'intorno del punto di arrivo. Dunque questa funzione che è continua insieme colle sue derivate o non avrà lungo il cammino da a_0 a b_0 nè massimi nè minimi oppure avrà un certo numero di minimi e un numero uguale di massimi. Le curve C che contengono il più gran numero di massimi e di minimi, contengano n degli uni ed n degli altri, oltre quelli in a_0 e in b_0. Denotiamo con $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ i punti di minimo, e con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ i punti di massimo, e gl'indici rappresentino l'ordine nel quale si trovano quando si percorre la curva C andando da a_0 a b_0. Evidentemente un solo punto α_i sarà compreso tra due consecutivi β_{i-1} e β_i, e un solo punto β_i tra i due consecutivi α_i e α_{i+1}. Denotiamo con d_i il luogo dei punti α_i, con D_i quello dei punti β_i. Ora una linea d_i o non incontrerà le linee D tra le quali è compresa e formerà una linea chiusa, oppure incontrerà una di queste e formerà con essa una linea chiusa. Avremo dunque un numero m di linee chiuse d, un numero m di linee chiuse D, e un numero $n-m$ di linee chiuse dD composte di una linea d e di una D.

Ora, essendo s una curva chiusa qualunque di σ, abbiamo

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial s}\, ds = 0 .$$

Quindi o sarà costante V sopra tutta la linea s, oppure il valore di $\frac{\partial V}{\partial s}$ cangerà un numero pari di volte il suo segno, e la funzione V avrà sopra s un numero uguale di massimi e di minimi.

Dunque ciascuna delle linee d, D, dD conterrà un numero uguale di massimi e di minimi della funzione V.

In un punto b della linea d in cui V è un minimo vi sarà un polo boreale. Infatti, sopra tutte le porzioni di curve C che si trovano nell'intorno di b, i più piccoli valori di V si trovano sopra d, ed il minimo di questi è in b. Dunque in b, V ha un valore minimo tra tutti quelli dell'intorno di b, e b è in conseguenza un polo boreale.

In un punto a della linea d in cui V è un massimo vi è un polo neutro. Infatti, il valore di V nel punto a è in questo caso un massimo rispetto ai valori che prende V sopra d nell'intorno di a, e un minimo rispetto ai valori che prende nel medesimo intorno sopra la curva C che passa per a, dunque V è crescente allontanandosi da a in alcune direzioni, decrescente in altre, e quindi a è un polo neutro.

Analogamente si dimostra che nei punti dei valori massimi di V sopra D si hanno poli australi e poli neutri nei punti dei valori minimi. Dunque sopra tutte le linee d e D vi sarà un numero di poli neutri uguale alla somma dei numeri dei poli australi e boreali.

Anche sopra le linee dD vi sarà un numero pari di massimi e di minimi di V e quindi un numero pari di poli.

Abbiamo dunque il seguente teorema:

Se la superficie di un corpo è semplicemente connessa ed ha un numero finito di poli, questo numero sarà sempre pari.

§. III.

Distribuzione degli assi e dei momenti magnetici in un corpo magnetico.

Passiamo a determinare le differenti specie di distribuzioni degli assi e dei momenti magnetici degli elementi di un corpo magnetico.

Denotando con A, B, C le componenti del momento magnetico di un elemento secondo i tre assi, supponiamo che in tutto lo spazio S occupato dal corpo magnetico sia verificata la equazione:

$$(1) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 .$$

Per un teorema noto dovuto a *Iacobi*, se le funzioni A, B e C sono finite e continue insieme colle loro derivate, e sodisfano alla equazione (1), esisteranno due funzioni μ e ν le quali verificheranno le equazioni

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial y} & \frac{\partial \nu}{\partial y} \\ \frac{\partial \mu}{\partial z} & \frac{\partial \nu}{\partial z} \end{vmatrix} = A , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial z} & \frac{\partial \nu}{\partial z} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial x} \end{vmatrix} = B , \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \nu}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} & \frac{\partial \nu}{\partial y} \end{vmatrix} = C .$$

Considerando i due sistemi di superficie rappresentati dall'equazioni

(3) $$\mu = c\ ,$$

(4) $$\nu = c'\ ,$$

e denotando rispettivamente con (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ ed $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ i coseni degli angoli che fanno cogli assi coordinati la normale p a una superficie (3), la normale p' a una superficie (4), la normale al piano che contiene p e p', e con (pp') l'angolo che p fa con p', l'equazioni (2) diverranno

$$\mathrm{A} = \alpha'' \sqrt{\Delta\mu\Delta\nu}\,\mathrm{sen}(pp'),$$
$$\mathrm{B} = \beta'' \sqrt{\Delta\mu\Delta\nu}\,\mathrm{sen}(pp'),$$
$$\mathrm{C} = \gamma'' \sqrt{\Delta\mu\Delta\nu}\,\mathrm{sen}(pp').$$

Quadrando, sommando e denotando con M il momento magnetico, avremo

(5) $$\mathrm{M} = \sqrt{\Delta\mu\Delta\nu}\,\mathrm{sen}(pp');$$

onde

(6) $$\mathrm{A} = \mathrm{M}\alpha'',\ \mathrm{B} = \mathrm{M}\beta'',\ \mathrm{C} = \mathrm{M}\gamma''.$$

Dall'equazioni (6) si deduce che in ogni punto dello spazio S la direzione dell'asse magnetico è tangente alla linea d'intersezione delle superficie dei sistemi (3) e (4) che passano per quel punto.

Le due superficie (3) e (4) insieme colle due

(7) $$\mu = c + dc\ ,$$

(8) $$\nu = c' + dc'$$

racchiuderanno in generale uno spazio solenoidale la cui sezione normale sarà infinitesima. Conduciamo per un punto m della linea s intersezione delle superficie (3) e (4) il piano N normale a questa linea; sia s_1 la linea d'intersezione del piano N colla superficie (3) ed s_2 la linea d'intersezione del medesimo piano colla superficie (4); siano $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i coseni degli angoli che la tangente ad s_1 nel punto m fa cogli assi, (x, y, z) le coordinate di m, $(x+dx, y+dy, z+dz)$ quelle del punto m_1 d'incontro della linea s_1 colla superficie (8) e ds_1 sia la porzione di s compresa tra m ed m_1; avremo

$$dx = \alpha_1 ds_1\,,\ dy = \beta_1 ds_1\,,\ dz = \gamma_1 ds_1\,,$$

e quindi

$$dc' = \left(\alpha_1 \frac{\partial \nu}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \nu}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) ds_1$$

$$= ds_1 \sqrt{\Delta \nu}\, \mathrm{sen}(pp')\,.$$

Analogamente, denotando con ds_2 la porzione di s_2 compresa tra le superficie (4) e (7), otterremo

$$dc = ds_2 \sqrt{\Delta \mu}\, \mathrm{sen}(pp')\,.$$

Onde

$$dc\,dc' = ds_1 ds_2 \sqrt{\Delta\mu \Delta\nu}\, \mathrm{sen}^2 (pp')\,.$$

Ora denotando con $d\sigma$ la sezione del solenoide nel punto m, si ha

$$d\sigma = ds_1 ds_2\, \mathrm{sen}(p\,p')\,;$$

quindi ponendo mente alla equazione (5) otterremo

$$d\mu d\nu = M d\sigma\,, \tag{9}$$

cioè il prodotto del momento magnetico per la sezione normale del solenoide è costante lungo tutto un medesimo solenoide, e se dividiamo un solenoide in elementi con piani normali alla linea s a distanze infinitesime uguali a ds, in ciascun elemento saranno uguali i prodotti delle sezioni normali per i rispettivi momenti magnetici, e possiamo enunciare il seguente teorema:

Quando le componenti dei momenti magnetici sodisfano in tutto lo spazio occupato da un corpo magnetico alla equazione (1), esistono due sistemi di superficie le cui linee d'intersezione hanno le tangenti nella direzione degli assi magnetici, e dividono lo spazio in solenoidi, in ciascuno dei quali è costante il prodotto della sezione normale per il momento magnetico.

In conseguenza di questa proprietà *W. Thomson* ha chiamato *solenoidale* questa distribuzione di magnetismo.

Supponiamo ora che siano sodisfatte in tutto lo spazio S l'equazioni:

$$(10) \qquad \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0\,.$$

Esisterà una funzione λ della quale A, B e C saranno le derivate prime rispetto ad x, y e z, cioè sarà

$$(11) \qquad A = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\,, \quad B = \frac{\partial \lambda}{\partial y}\,, \quad C = \frac{\partial \lambda}{\partial z}\,.$$

Consideriamo ora nello spazio S la superficie di equazione

$$(12) \qquad \lambda = c\,,$$

la quale o sarà chiusa o terminerà alla superficie σ. Denotando con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale p alla superficie (12) fa cogli assi, avremo

$$\alpha = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{\Delta\lambda}}\,, \quad \beta = \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{\Delta\lambda}}\,, \quad \gamma = \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\Delta\lambda}}\,,$$

onde

$$A = \alpha\sqrt{\Delta\lambda}\,, \quad B = \beta\sqrt{\Delta\lambda}\,, \quad C = \gamma\sqrt{\Delta\lambda}\,.$$

Quadrando, sommando e denotando con M il momento magnetico, otterremo

$$M = \sqrt{\Delta\lambda}\,,$$

$$A = M\alpha\,, \quad B = M\beta\,, \quad C = M\gamma\,,$$

e quindi la direzione dell'asse magnetico in un punto qualunque delle superficie (12) coincide colla direzione della normale.

Le superficie

$$(13) \qquad \lambda = c\,, \quad \lambda = c + dc\,,$$

limiteranno uno spazio lamellare di grossezza infinitesima, e denotando con dp la porzione di normale alle superficie (13) e compresa tra queste, avremo

$$d\lambda = dp\sqrt{\Delta\lambda} = \mathrm{M}dp\,, \tag{14}$$

e quindi costante il prodotto del momento magnetico per la lunghezza della normale compresa tra due superficie (12) infinitamente vicine. Così è dimostrato il seguente teorema:

Quando sono verificate le equazioni (10) in tutto lo spazio occupato dal corpo magnetico, questo può dividersi in lamine di grossezza infinitesima, che hanno in ogni punto gli assi magnetici nella direzione delle loro normali e costante il prodotto del momento per la grossezza della lamina.

Quando le funzioni A, B e C non sono soggette ad altra condizione fuori che a quella di essere finite e continue insieme colle derivate in tutto lo spazio occupato dal corpo magnetico, dalla identità:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\right)=0\,,$$

per mezzo del solito teorema di *Iacobi*, si deduce la esistenza di due funzioni μ e ν, che godono la proprietà di sodisfare l'equazioni

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial y}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial y} & \frac{\partial\nu}{\partial y}\\ \frac{\partial\mu}{\partial z} & \frac{\partial\nu}{\partial z}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial z} & \frac{\partial\nu}{\partial z}\\ \frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\nu}{\partial x}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\nu}{\partial x}\\ \frac{\partial\mu}{\partial y} & \frac{\partial\nu}{\partial y}\end{vmatrix}. \tag{15}$$

A queste equazioni può darsi evidentemente la forma seguente

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{B}-\nu\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{C}-\nu\frac{\partial\mu}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{C}-\nu\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{A}-\nu\frac{\partial\mu}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{A}-\nu\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{B}-\nu\frac{\partial\mu}{\partial y}\right).$$

Dunque esiste anche una funzione λ per la quale abbiamo

$$(16)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \nu\frac{\partial\mu}{\partial x}, \\ B &= \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \nu\frac{\partial\mu}{\partial y}, \\ C &= \frac{\partial\lambda}{\partial z} + \nu\frac{\partial\mu}{\partial z}. \end{aligned}$$

Per ottenere effettivamente λ, prendiamo per variabili invece di x, y, z, le μ, ν e una terza variabile θ. Espressa λ in funzione di queste nuove variabili le (16) diverranno

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} + \nu\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ B &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} + \nu\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\frac{\partial\nu}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}, \\ C &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} + \nu\right)\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\frac{\partial\nu}{\partial z} + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}, \end{aligned}$$

Moltiplichiamo rispettivamente i primi membri di queste equazioni per i primi membri delle (15) ed i secondi per i secondi e sommando otterremo

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\nu}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} & \frac{\partial\mu}{\partial y} & \frac{\partial\nu}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} & \frac{\partial\mu}{\partial z} & \frac{\partial\nu}{\partial z} \end{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial\theta};$$

onde

$$(17)\qquad \lambda = \int \frac{A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial x} & \frac{\partial\nu}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} & \frac{\partial\mu}{\partial y} & \frac{\partial\nu}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} & \frac{\partial\mu}{\partial z} & \frac{\partial\nu}{\partial z} \end{vmatrix}} d\theta .$$

Se è verificata l'equazione

$$(18) \qquad A\left(\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}\right)+C\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0,$$

avremo λ costante, le (16) diverranno

$$A=\nu\frac{\partial\mu}{\partial x},\ B=\nu\frac{\partial\mu}{\partial y},\ C=\nu\frac{\partial\mu}{\partial z},$$

e denotando con α, β, γ i coseni degli angoli che la normale alla superficie di equazione

$$(19) \qquad \mu=c,$$

fa con i tre assi, sarà

$$A=\alpha\nu\sqrt{\Delta\mu},\ B=\beta\nu\sqrt{\Delta\mu},\ C=\gamma\nu\sqrt{\Delta\mu},$$

ed essendo M il momento magnetico avremo

$$M=\nu\sqrt{\Delta\mu},$$

$$(20) \qquad A=M\alpha,\ B=M\beta,\ C=M\gamma;$$

cioè la direzione dell'asse magnetico in un punto qualunque della superficie (19) coincide colla direzione della normale.

Le superficie

$$(21) \qquad \mu=c,\ \mu=c+dc,$$

dividono lo spazio S in lamine di grossezza infinitesima anche in questo caso; ma denotando con dp la porzione di normale compresa tra due superficie (21), ed essendo quindi

$$dc=\sqrt{\Delta\mu}\,dp,$$

avremo

$$(22) \qquad \nu d\mu=M dp,$$

cioè il prodotto del momento magnetico per la grossezza della lamina non è più costante, ma è proporzionale al valore della funzione ν, e la funzione potenziale v di una di queste lamine è funzione di un doppio strato non omogeneo.

Questa distribuzione di magnetismo, in cui gli assi magnetici coincidono colle normali a un sistema di superficie, e i prodotti dei momenti magnetici per le grossezze degli strati formati da due superficie del sistema infinitamente vicine sono variabili, fu chiamata da *W. Thomson* distribuzione *lamellare complessa*.

Dall'equazioni (16) si deduce il seguente teorema:

Qualunque siano le funzioni che esprimono le componenti dei momenti magnetici in un corpo magnetico, purchè siano finite e continue insieme colle loro derivate, la distribuzione del magnetismo può sempre decomporsi in due: una lamellare semplice e l'altra lamellare complessa; manca la seconda se sono sodisfatte l'equazioni (10); manca la prima se non sono sodisfatte le (10) ma è verificata la equazione (18).

Quando la distribuzione è lamellare complessa, osservando l'equazioni (20) e (22), avremo

$$\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\sigma dp = \nu \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma d\mu ,$$

e quindi la funzione potenziale sarà

$$V = \int d\mu \int \nu \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma .$$

Nel caso della distribuzione lamellare semplice sarà

$$\nu = 1 ,$$

e denotando con ω_μ la grandezza apparente della linea d'intersezione della superficie (μ) colla superficie σ avremo per ciò che abbiamo dimostrato nel §. XI del Cap. I.

$$V = \int\int \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p} d\sigma d\mu = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \omega_\mu \, d\mu ,$$

dove μ_0 e μ_1 sono i valori di μ corrispondenti alle superficie (19) tangenti alla superficie che limita il corpo.

Poniamo ora

$$(25)\qquad F = -\int_S \frac{A' dS'}{r}\,, \quad G = -\int_S \frac{B' dS'}{r}\,, \quad H = -\int_S \frac{C' dS'}{r}\,,$$

dove r è la distanza di un punto m di coordinate x, y, z dal punto m' di coordinate (x', y', z') al quale si riferiscono le integrazioni, ed inoltre sia

$$(26)\qquad a = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\,, \quad b = \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\,, \quad c = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\,,$$

$$(27)\qquad \phi = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\,.$$

Avremo

$$(28)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} &= \Delta^2 F - \frac{\partial \phi}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} &= \Delta^2 G - \frac{\partial \phi}{\partial y}\,, \\ \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} &= \Delta^2 H - \frac{\partial \phi}{\partial z}\,, \end{aligned} \right.$$

ed osservando che, essendo il punto m nello spazio S, sono verificate l'equazioni

$$\Delta^2 F = 4\pi A\,, \quad \Delta^2 G = 4\pi B\,, \quad \Delta^2 H = 4\pi C\,,$$

otterremo

$$(29)\qquad \left\{ \begin{aligned} 4\pi A &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\,, \\ 4\pi B &= \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\,, \\ 4\pi C &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\,. \end{aligned} \right.$$

Dall'equazioni (29), ponendo mente alla identità

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)=0\,,$$

si deduce il seguente teorema:

Qualunque siano le funzioni che esprimono le componenti dei momenti di un corpo magnetico, purchè atte all' integrazione, la distribuzione del magnetismo può sempre decomporsi in due: una lamellare semplice e una solenoidale.

§. IV.

Componenti della forza magnetica.

Se nella equazione (27) del paragrafo precedente sostituiamo i valori di F, G, H dati dall'equazioni (25), abbiamo

$$\psi=\int_S\left(\mathrm{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}+\mathrm{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}+\mathrm{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)d\mathrm{S}=-\mathrm{V}\,,$$

e l'equazioni (28) quando il punto *e* a cui il valore di V si riferisce è esterno allo spazio S, e in conseguenza

$$\Delta^2\mathrm{F}=0\,,\ \Delta^2\mathrm{G}=0\,,\ \Delta^2\mathrm{H}=0\,,$$

daranno

$$(1)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}&=\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\,,\\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}&=\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\,,\\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}&=\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\,.\end{aligned}$$

Quando il punto *e* si trova nello spazio S, e in conseguenza

$$\Delta^2\mathrm{F}=4\pi\mathrm{A}\,,\ \Delta^2\mathrm{G}=4\pi\mathrm{B}\,,\ \Delta^2\mathrm{H}=4\pi\mathrm{C}\,,$$

avremo

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} - 4\pi A\,, \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} - 4\pi B\,, \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} - 4\pi C\,.
\end{aligned}
$$

Finchè il punto e si trova nello spazio esterno ad S le derivate della funzione potenziale V rappresentano le componenti secondo gli assi coordinati della forza esercitata dal corpo magnetico sopra un punto e in cui sia concentrata l'unità di massa di fluido boreale, e denotando con X, Y, Z queste componenti, sarà

$$
X = \frac{\partial V}{\partial x}\,,\ X = \frac{\partial V}{\partial y}\,,\ Z = \frac{\partial V}{\partial z}\,,
$$

e le derivate di V avranno l'espressione (1); ma quando il punto e si trova nello spazio S, la quantità sotto l'integrale che esprime la funzione V diviene infinita, e non è più permesso di stabilire senz'altro l'uguaglianza

$$
\begin{aligned}
X &= \int_S \left(A \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x'^2} + B \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial y'} + C \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x' \partial z'} \right) dS \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \int_S \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dS\,,
\end{aligned}
$$

e le altre due analoghe per Y e Z.

Per determinare le componenti X, Y, Z nel punto e interno ad S, descriviamo intorno a questo punto una superficie chiusa σ', e denotiamo con S′ lo spazio che si ottiene togliendo da S lo spazio s' racchiuso da σ'. Le componenti X′, Y′, Z′ della forza esercitata dalla porzione del corpo magnetico che occupa lo spazio S′, sopra il punto e che si trova nello spazio esterno a S', saranno uguali alle derivate della funzione potenziale, e avremo

$$X' = -\frac{\partial}{\partial x}\int_{S'}\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} + B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'} + C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\right)dS',$$

onde

$$(3)\quad X' = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma'}(A\alpha + B\beta + C\gamma)\frac{d\sigma'}{r} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma}\mu\cos(\mu p)\frac{d\sigma}{r}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\int_{S'}\left(\frac{\partial A}{\partial x'} + \frac{\partial B}{\partial y'} + \frac{\partial C}{\partial z'}\right)\frac{dS'}{r},$$

con altre due analoghe espressioni per Y' e Z', ed α, β, γ sono i coseni degli angoli che fa cogli assi la normale σ' diretta verso l'interno di S'. Se coll'impiccolire indefinitamente lo spazio s' le funzioni X', Y' e Z' convergessero ciascuna verso un limite unico e determinato, questi limiti sarebbero i valori delle componenti X, Y, Z nel punto e.

Il secondo termine del secondo membro della (3) non dipende da s', e quindi al limite conserva lo stesso valore; il terzo è la derivata della funzione potenziale di una materia ponderabile a tre dimensioni, e al limite col decrescere indefinitamente di s' si riduce alla derivata della funzione potenziale di tutta la massa che occupa lo spazio S.

Ponendo

$$(3)\qquad \int_{\sigma'}(A'\alpha + B'\beta + C'\gamma)\frac{d\sigma'}{r} = w,$$

avremo

$$(4)\qquad \begin{aligned} \lim X' &= \frac{\partial V}{\partial x} + \lim\frac{\partial w}{\partial x},\\ \lim Y' &= \frac{\partial V}{\partial y} + \lim\frac{\partial w}{\partial y},\\ \lim Z' &= \frac{\partial V}{\partial z} + \lim\frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}$$

dove le derivate di V sono date dall'equazioni (2).

Ma se alle funzioni A', B', C' è applicabile il teorema di Taylor, A, B e C sono i rispettivi valori di queste funzioni nel punto e, ed ε è la distanza di questo punto da un punto (x', y', z') di σ', sarà

$$A' = A + \varepsilon\theta_1\,, \quad B' = B + \varepsilon\theta_2, \quad C' = C + \varepsilon\theta_3\,,$$

dove θ_1, θ_2, θ_3 denotano funzioni che si conservano finite anche per $\varepsilon = 0$. In conseguenza dalla equazione (3) ponendo

$$k_{uv} = \int_{\sigma'} \frac{\cos(pu)\cos(rv)\,d\sigma'}{r^2}\,, \tag{5}$$

otterremo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= Ak_{xx} + Bk_{yx} + Ck_{zx} + \eta_1\,,\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= Ak_{xy} + Bk_{yy} + Ck_{zy} + \eta_2\,,\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= Ak_{xz} + Bk_{yz} + Ck_{zz} + \eta_3\,,
\end{aligned} \tag{6}$$

essendo η_1, η_2, η_3 quantità che convergono a zero col diminuire indefinitamente di ε.

Dalla (5) osservando la equazione (16) del §. XI. del Cap. I, e che la normale p a σ' è diretta verso l'esterno dello spazio racchiuso da σ', abbiamo

$$k_{xx} + k_{yy} + k_{zz} = \int_{\sigma'} \frac{\cos(pr)\,d\sigma'}{r^2} = 4\pi\,. \tag{7}$$

Se imaginiamo una curva chiusa s sopra la superficie σ', la quale divida σ' in due parti σ_1 e σ_2, dalla equazione (7) del §. XII del Cap. I, ponendovi $X = Y = 0$, $Z = \frac{1}{r}$, ricaveremo

$$\int_{\sigma_1} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\alpha - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\beta \right) d\sigma_1 = \int \frac{\partial z}{\partial s}\frac{ds}{r}\,,$$

$$\int_{\sigma_2} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\alpha - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\beta \right) d\sigma_2 = -\int \frac{\partial z}{\partial s}\frac{ds}{r}\,.$$

Sommando queste equazioni ed osservando la (5), avremo

$$k_{xy} - k_{yx} = 0\,,$$

e in conseguenza

(8) $$k_{xy} = k_{yx}\,,\ k_{yz} = k_{zy}\,,\ k_{xz} = k_{zx}\,.$$

Prendiamo per σ' una superficie di rivoluzione intorno all'asse delle x, e denotiamo con θ e φ le coordinate sferiche del punto (x', y', z') quando il centro sia in e e l'asse polare sia l'asse delle x. L'angolo che la normale p fa coll'asse delle x e il raggio r saranno funzioni soltanto di θ, la normale p e il raggio r saranno nello stesso piano meridiano, e quindi sarà

$$\cos(py) = \operatorname{sen}(px)\cos\varphi,\ \cos(pz) = \operatorname{sen}(px)\operatorname{sen}\varphi\,,$$

e l'elemento della superficie verrà espresso dalla equazione

$$d\sigma' = r\operatorname{sen}\theta\, d\varphi ds\,,$$

denotando con ds l'elemento del meridiano. In conseguenza dalle equazioni (5) otterremo

$$k_{xy} = \int_s \frac{\cos(px)\operatorname{sen}^2\theta\, ds}{r} \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0\,,$$

(9) $$k_{zy} = \int_s \frac{\operatorname{sen}(px)\operatorname{sen}^2\theta\, ds}{r} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi d\varphi = 0\,,$$

$$k_{xz} = \int_s \frac{\cos(px)\operatorname{sen}^2\theta\, ds}{r} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi d\varphi = 0\,,$$

e quindi le (6) divengono

$$\frac{\partial w}{\partial x} = Ak_{xx} + \eta_1,\ \frac{\partial w}{\partial y} = Bk_{yy} + \eta_2,\ \frac{\partial w}{\partial z} = Ck_{zz} + \eta_3\,.$$

Se σ' è una sfera col centro in e, avremo $\cos px = \cos\theta$, onde

$$k_{xx} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi\,,$$

e

(10) $$k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = \frac{4}{3}\pi\,,$$

Dunque sarà

$$\lim \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{4\pi}{3} \mathrm{A}\,,\ \lim \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4\pi}{3} \mathrm{B}\,,\ \lim \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{4\pi}{3} \mathrm{C}\,.$$

Se la superficie σ' è un cilindro circolare retto che ha per asse l'asse delle x, avremo sopra la base superiore

$$\cos(px) = 1\,,\ \cos(py) = \cos(pz) = 0\,,$$

$$d\sigma' = \frac{r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi}{\cos\theta}\,;$$

sopra la base inferiore

$$\cos(px) = -1\,,\ \cos(py) = \cos(pz) = 0\,,$$

$$d\sigma' = -\frac{r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi}{\cos\theta}\,,$$

e sopra la parte convessa

$$\cos(px) = 0\,,\ \cos(py) = \cos\varphi\,,\ \cos(pz) = \operatorname{sen}\varphi\,,$$

$$d\sigma' = r^2 d\theta d\varphi\,.$$

Onde denotando con θ_0 l'angolo al vertice del cono che ha per base la base del cilindro e il vertice nel punto e e supponendo che questo punto sia alla metà dell'asse del cilindro, avremo

$$k_{xx} = 2\pi \int_0^{\theta_0} \operatorname{sen}\theta d\theta + 2\pi \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta = 4\pi\,(1 - \cos\theta_0)\,,$$

$$(11) \qquad k_{yy} = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \operatorname{sen}\theta \cos^2\varphi d\theta d\varphi = 2\pi\cos\theta_0\,,$$

$$k_{zz} = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi d\theta d\varphi = 2\pi\cos\theta_0\,;$$

e quindi

$$\lim \frac{\partial w}{\partial x} = 4\pi(1 - \cos\theta_0)\mathrm{A}\,,\ \lim \frac{\partial w}{\partial y} = 2\pi \mathrm{B} \cos\theta_0\,,\ \lim \frac{\partial w}{\partial z} = 2\pi \mathrm{C} \cos\theta_0\,.$$

Se $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, cioè l'altezza è piccolissima di fronte al raggio della base

$$\cos\theta_0 = 0 ,$$

e si ha

$$\lim \frac{\partial w}{\partial x} = 4\pi A , \quad \lim \frac{\partial w}{\partial y} = 0 , \quad \lim \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Se invece $\theta_0 = 0$ cioè il raggio della base è piccolissimo di fronte all'altezza del cilindro sarà

$$\lim \frac{\partial w}{\partial x} = 0 , \quad \lim \frac{\partial w}{\partial y} = 2\pi B, \quad \lim \frac{\partial w}{\partial z} = 2\pi C .$$

Se denotiamo con ω l'angolo che l'asse magnetico fa coll'asse del cilindro, con M il momento magnetico, con l una retta qualunque, con (Ml) e con (Rl) gli angoli che l'asse magnetico e l'asse del cilindro fanno colla retta l; moltiplicando le tre equazioni (10) rispettivamente per i coseni degli angoli che la retta l fa cogli assi, e sommando avremo

$$\lim \frac{\partial w}{\partial l} = 4\pi\,(2 - 3\cos\theta_0)\, M\cos\omega \cos(lR) + 2\pi\, M\cos\theta_0 \cos(Ml) .$$

Se rappresentiamo con A, B, C le componenti del momento magnetico secondo tre assi qualunque ortogonali, avremo dunque

$$(12)\qquad \begin{aligned} \lim \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\pi(2 - 3\cos\theta_0)\, M\cos\omega \cos(Rx) + 2\pi A \cos\theta_0 , \\ \lim \frac{\partial w}{\partial y} &= 2\pi(2 - 3\cos\theta_0)\, M\cos\omega \cos(Ry) + 2\pi B\cos\theta_0 , \\ \lim \frac{\partial w}{\partial z} &= 2\pi(2 - 3\cos\theta_0)\, M\cos\omega \cos(Rz) + 2\pi C\cos\theta_0 , \end{aligned}$$

Se l'asse di rivoluzione e l'asse magnetico coincidono sarà

$$(13)\qquad \begin{aligned} \lim \frac{\partial w}{\partial x} &= 4\pi(1 - \cos\theta_0) A , \\ \lim \frac{\partial w}{\partial y} &= 4\pi(1 - \cos\theta_0) B , \\ \lim \frac{\partial w}{\partial z} &= 4\pi(1 - \cos\theta_0) C . \end{aligned}$$

Se l'asse magnetico è normale all'asse di rivoluzione, avremo invece

$$(14)\qquad \begin{aligned} \lim \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\pi \mathrm{A} \cos\theta_0 , \\ \lim \frac{\partial w}{\partial y} &= 2\pi \mathrm{B} \cos\theta_0 , \\ \lim \frac{\partial w}{\partial z} &= 2\pi \mathrm{C} \cos\theta_0 . \end{aligned}$$

§. V.

Momenti magnetici ed assi di un corpo magnetico.

Per determinare l'azione di un corpo magnetico sopra un punto e in cui sia concentrata l'unità di massa di magnetismo boreale, che si trova molto distante dal corpo magnetico, conviene esprimere la funzione potenziale V in serie convergente ordinata per le potenze negative della distanza di e da un punto del corpo e calcolare soltanto i primi termini.

Prendiamo un punto O del corpo magnetico per origine delle coordinate e siano: x, y, z le coordinate del punto e, r la sua distanza dal punto O; x', y', z' le coordinate di un punto m del corpo ed r' la distanza di e da m; avremo in serie convergente in ugual grado

$$\frac{1}{r'} = \sum_0^\infty \frac{Q_n}{r^{2n+1}} ,$$

e le funzioni Q_n saranno date dall'equazioni

$$Q_0 = 1 , \ Q_1 = x'x + y'y + z'z ,$$

$$Q_2 = \frac{3(x'x + y'y + z'z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{2} ,$$

onde

$$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x} = \frac{x}{r^3} + \frac{x'(2x^2 - y^2 - z^2) + 3yxy' + 3zxz'}{r^5} + \ldots,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y} = \frac{y}{r^3} + \frac{3xyx' + y'(2y^2 - z^2 - z^2) + 3zyz'}{r^5} + \ldots.$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z} = \frac{z}{r^3} + \frac{3xzx' + 3zyy' + z'(2z^2 - x^2 - y^2)}{r^5} + \ldots.$$

Sostituendo questi valori nella espressione della funzione

$$V = -\int_S \left(A \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x'} + B \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y'} + C \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z'} \right) dS,$$

e ponendo

$$M_1 = \int_S A dS, \qquad M_2 = \int_S B dS, \qquad M_3 = \int_S C dS,$$

$$(1) \quad N_1 = \int_S x' A dS, \qquad N_2 = \int_S y' B dS, \qquad N_2 = \int_S z' C dS,$$

$$P_1 = \int_S (Bz' + Cy') dS, \; P_2 = \int_S (Cx' + Az') dS, \; P_3 = \int_S (Ay' + Bx') dS,$$

otterremo

$$V = -\frac{M_1 x + M_2 y + M_3 z}{r^3}$$

$$-\frac{x^2(2N_1 - N_2 - N_3) + y^2(2N_2 - N_1 - N_3) + z^2(2N_3 - N_1 - N_2) + 3(P_1 yz + P_2 zx + P_3 xy)}{r^5} - \ldots$$

Poniamo

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2,$$

$$M_1 = M\alpha, \; M_2 = M\beta, \; M_3 = M\gamma$$

e chiamiamo *momento magnetico* del corpo la quantità M, ed M_1, M_2, M_3 le *componenti del momento magnetico;* la retta che fa cogli assi gli angoli i cui coseni sono α, β, γ si chiamerà l'*asse magnetico* del corpo.

Prendendo l'asse delle x nella direzione dell'asse magnetico avremo

$$M_2 = 0\,,\ M_3 = 0\,,\ M_1 = M\,.$$

Il Sig. *Maxwell* ha determinato il punto C che bisogna prendere per origine, e le direzioni che si debbono prendere per gli assi affinchè la funzione potenziale V abbia la forma più semplice.

Siano x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto C e distinguiamo con un apice i valori delle N e delle P quando si trasporta l'origine in C; avremo

$$\begin{array}{lll} N'_1 = N_1 - Mx_0\,, & N'_2 = N_2\,, & N'_3 = N_3\,, \\ P'_1 = P_1\,, & P'_2 = P_2 - Mz_0\,, & P'_3 = P_3 - My_0\,. \end{array}$$

Se prendiamo

$$x_0 = \frac{2N_1 - N_2 - N_3}{2M}\,,\ y_0 = \frac{P_3}{M}\,,\ z_0 = \frac{P_2}{M}\,, \tag{2}$$

sarà

$$N'_1 = \frac{N_2 + N_3}{2}\,,\ N'_2 = N_2\,,\ N'_3 = N_3\,,\ P'_1 = P\,,$$

$$P'_2 = 0\,,\ P'_3 = 0\,.$$

e quindi

$$V = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{\frac{3}{2}(y^2 - z^2)(N_2 - N_3) + 3P_1 yz}{r^5} - \ldots$$

Il punto C le cui coordinate sono date dall'equazioni (2) si chiama il *centro* del magnete.

Facciamo ora la trasformazione di coordinate:

$$y_1 = y'\cos\gamma - z'\operatorname{sen}\gamma\,,$$
$$z_1 = y'\operatorname{sen}\gamma + z'\cos\gamma\,,$$

avremo

$$B' = B\cos\gamma - C\,\mathrm{sen}\gamma\,,$$

$$C' = B\,\mathrm{sen}\gamma + C\cos\gamma\,.$$

Onde

$$P'_1 = \int_S \Big\{(B\cos\gamma - C\,\mathrm{sen}\gamma)(y'\,\mathrm{sen}\gamma + z'\cos\gamma) + (B\,\mathrm{sen}\gamma + C\cos\gamma)(y'\cos\gamma - z'\,\mathrm{sen}\gamma)\Big\}dS$$

$$= (N_2 - N_3)\,\mathrm{sen}2\gamma + P_1\cos 2\gamma\,,$$

e quindi prendendo

$$\mathrm{tang}2\gamma = \frac{P_1}{N_3 - N_2}\,, \tag{3}$$

avremo

$$P'_1 = 0\,:$$

onde

$$V = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{3(N_2 - N_3)(y^2 - z^2)}{2r^5} - \ldots \tag{4}$$

L'asse magnetico del corpo si dice l'*asse primario* del magnete e i due assi normali all'asse primario e ortogonali tra loro, la direzione dei quali è data dalla equazione (3), si chiamano gli *assi secondari* del magnete.

§. VI.

Potenziali magnetici

Siano: U la funzione potenziale di un sistema H di corpi magnetici, A, B, C le componenti secondo gli assi coordinati dei momenti magnetici degli elementi di un corpo K che non fa parte del sistema H, ρ' la densità del magnetismo in un punto di coordinate (x', y', z'), il quale appartiene a un elemento di cui un punto ha le coordinate (x, y, z). Il potenziale p del sistema H sopra un elemento di K, denotando con s lo spazio occupato dall'elemento, sarà

$$(1) \qquad p = \int_s U' \rho' ds \,.$$

Ora in un punto qualunque (x', y', z') dell'elemento abbiamo

$$(2) \qquad U' = U + \frac{\partial U}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial U}{\partial y}(y' - y) + \frac{\partial U}{\partial z}(z' - z) \,.$$

Quindi sostituendo il valore (2) nell'equazione (1), ed osservando l'equazioni

$$\int_s \rho' ds = 0 \,, \int_s \rho'(x' - x) dx = A dS \,, \int_s \rho'(y' - y) dy = B dS \,, \int_s \rho'(z' - z) dz = C dS \,,$$

otterremo

$$p = \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) dS \,.$$

Il potenziale P del sistema H sopra il corpo K sarà dunque

$$(3) \qquad P = \int_S \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) dS \,.$$

Poichè il corpo K non fa parte del sistema H, le componenti X, Y, Z, della forza magnetica di H nello spazio S occupato da K, saranno uguali rispettivamente alle derivate di U rapporto ad x, y, z; e quindi la equazione (3) potrà anche scriversi nel modo seguente:

$$(4) \qquad P = \int_S (AX + BY + CZ) \, dS \,.$$

Passiamo a determinare il potenziale del corpo magnetico K sopra sè stesso. Per questa determinazione è necessario di avere prima il potenziale di tutto il corpo sopra uno dei suoi elementi magnetici, e questo potenziale dipende dalla forma degli elementi, e dal modo con cui sono distribuiti.

Sia σ' la superficie, la quale deve imaginarsi intorno a un punto del corpo, come abbiamo veduto nel paragrafo precedente, per ottenere l'azione sopra quel punto degli elementi infinitamente vicini, ogni elemento magnetico abbia la forma di un'ellissoide e i fluidi magnetici siano in esso distribuiti come se la magnetizzazione fosse prodotta da una forza magnetica che sopra lui potesse riguardarsi costante in intensità e direzione. Sia V la funzione potenziale di tutto il corpo magnetico K; X', Y', Z' le componenti della forza magnetica nello spazio racchiuso da σ', q il potenziale di tutto il corpo sopra l'elemento e p il potenziale dell' elemento sopra sè stesso. Avremo dalle formule (4) e (9) del §. IV.

$$X' = \frac{\partial V}{\partial x} + k_{xx}A + k_{yx}B + k_{zx}C\,,$$

$$Y' = \frac{\partial V}{\partial y} + k_{xy}A + k_{yy}B + k_{zy}C\,,$$

$$Z' = \frac{\partial V}{\partial z} + k_{xz}A + k_{yz}B + k_{zz}C\,;$$

onde dalla equazione (4) per il potenziale q, si ottiene

$$q = \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x} + k_{xx}A + k_{yx}B + k_{zx}C\right)A\,dS\ ,$$

dove la somma è estesa alle tre coppie di quantità: x, A; y, B; z, C; e dalla formula (13) del §. I., abbiamo

$$p = -\pi habc\,(h_1A^2 + h_2B^2 + h_3C^2)\,dS\,.$$

Denotando con P il potenziale di tutto il corpo K sopra sè stesso, ed applicando il teorema della pagina 125, se ne deduce

$$(5)\quad P = \frac{1}{2}\int_S\left\{\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x} + k_{xx}A + k_{xy}B + k_{xz}C\right)A - 2\pi habc(h_1A^2 + h_2B^2 + h_3C^2)\right\}dS\,.$$

Ora se prendiamo l'integrale

$$(6)\ \Omega=\int\left[\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+4\pi A\right)+\frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}+4\pi B\right)+\frac{\partial V}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}+4\pi C\right)\right]dS\,,$$

e lo estendiamo a tutto lo spazio, osservando che nello spazio esterno al corpo $A=B=C=0$ e $\Delta^2V=0$

$$(7)\quad \Omega=\int_\sigma\left(\frac{\partial V_e}{\partial p}-\frac{\partial V_i}{\partial p}\right)V d\sigma-4\pi\int_\sigma(A\alpha+B\beta+C\gamma)V d\sigma$$

$$-\int_S\left[\Delta^2V+4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right]V dS\,,$$

dove p denota la normale diretta verso l'interno dello spazio racchiuso dalla superficie σ ed α, β, γ sono i coseni degli angoli che la stessa normale fa cogli assi. Dalla equazione (2) del §. II si ricava

$$\frac{\partial V_e}{\partial p}-\frac{\partial V_i}{\partial p}=4\pi(A\alpha+B\beta+C\gamma)\,,$$

$$\Delta^2V=-4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right);$$

e quindi la equazione (7) diviene

$$(8)\qquad \Omega=0\,,$$

e quindi

$$(9)\quad \frac{1}{2}\int_S\left(\frac{\partial V}{\partial x}A+\frac{\partial V}{\partial y}B+\frac{\partial V}{\partial z}C\right)dS=-\frac{1}{8\pi}\int \Delta V\, dS\,,$$

e nel secondo membro l'integrale è esteso a tutto lo spazio.

Sommando la equazione (5) colla (9), avremo

$$(10)\ P=-\frac{1}{8\pi}\int[\Delta V+4\pi(2\pi abchh_1-k_{xx})A^2+4\pi(2\pi abchh_2-k_{yy})B^2$$

$$+4\pi(2\pi abchh_3-k_{zz})C^2-8\pi k_{xy}AB-8\pi k_{yz}BC-8\pi k_{zx}CA]dS.$$

Nel caso che gli elementi siano sferici, e si possano riguardare come sferiche le superficie σ'; abbiamo

$$k_{xy} = k_{xz} = k_{zx} = 0 \,, \; k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = \frac{4}{3}\pi \,,$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = \frac{2}{3R^3} \,, \; abc = R^3 \,,$$

onde

$$(11) \quad P = -\frac{1}{8\pi}\int [\Delta V + \frac{16\pi^2}{3}(h-1)(A^2+B^2+C^2)]\, dS \,.$$

Se le superficie σ' sono cilindri la cui altezza è infinitesima di fronte al raggio della base e che hanno l'asse coincidente coll'asse magnetico dell'elemento, dall'equazioni (13) e (6) del paragrafo precedente avremo

$$k_{xx}A + k_{yx}B + k_{zx}C = 4\pi A \,, \; k_{xy}A + k_{yy}B + k_{zy}C = 4\pi B, \; k_{xz}A + k_{yz}B + k_{zz}C = 4\pi C;$$

onde, se gli elementi sono sferici, la equazione (10) darà per il potenziale:

$$(12) \quad P = -\frac{1}{8\pi}\int [\Delta V + \frac{16\pi^2}{3}(h-3)(A^2+B^2+C^2)]\, dS \,.$$

§. VII.

Induzione magnetica.

Un corpo che ha i suoi elementi magnetici conduttori del magnetismo, quando si troverà sotto l'azione di forze magnetiche, si magnetizzerà e perderà la sua magnetizzazione quando queste cesseranno di agire; cioè prenderà un *magnetismo temporario.* Data la funzione potenziale delle forze inducenti, determiniamo il magnetismo indotto in un dato corpo.

Siano: K il corpo, S lo spazio occupato da K, U la funzione potenziale delle forze inducenti che supporremo invariabili, V la funzione potenziale del magnetismo indotto in K ed A, B, C le componenti dei momenti magnetici degli elementi di K.

Affinchè il magnetismo si trovi in equilibrio in ogni elemento di K è necessario che la variazione prima del potenziale P di tutto il sistema sopra K sia uguale a zero. Ma dall'equazioni (3) e (5) del paragrafo precedente abbiamo per il valore di P la espressione

$$P=\frac{1}{2}\int_S\left[\Sigma\left(\frac{\partial(2U+V)}{\partial x}+k_{xx}A+k_{xy}B+k_{xz}C\right)A-2\pi habc(h_1A^2+h_2B^2+h_3C^2)\right]dS.$$

Onde la variazione prima sarà

$$\delta P=\frac{1}{2}\int_S dS\Sigma\left[A\frac{\partial\delta V}{\partial x}+\left(\frac{\partial(2U+V)}{\partial x}+2k_{xx}A+2k_{xy}B+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2k_{xz}C-4\pi habch_1A\right)\delta A\right].$$

Ora per il teorema relativo alla reciprocità dei potenziali di un sistema sopra un altro, abbiamo

$$\int_S A\frac{\partial\delta V}{\partial x}dS=\int_S\frac{\partial V}{\partial x}\delta A\,dS,$$

quindi

$$\delta P=\int_S dS\,\Sigma\,\delta A\left[\frac{\partial(U+V)}{\partial x}+k_{xx}A+k_{xy}B+k_{xz}C-2\pi habch_1A\right],$$

e affinchè la variazione sia uguale a zero, dovranno essere sodisfatte l'equazioni

$$(1)\quad\begin{aligned}(2\pi habch_1-k_{xx})A-k_{yx}B-k_{xz}C&=\frac{\partial(U+V)}{\partial x},\\-k_{xy}A+(2\pi habch_2-k_{yy})B-k_{yz}C&=\frac{\partial(U+V)}{\partial y},\\-k_{xz}A-k_{zy}B+(2\pi habch_3-k_{zz})C&=\frac{\partial(U+V)}{\partial z}.\end{aligned}$$

dalle quali si deduce

$$A = L\,\frac{\partial(U+V)}{\partial x} + R\,\frac{\partial(U+V)}{\partial y} + Q\,\frac{\partial(U+V)}{\partial z}\,,$$

$$B = R\,\frac{\partial(U+V)}{\partial x} + M\,\frac{\partial(U+V)}{\partial y} + P\,\frac{\partial(U+V)}{\partial z}\,,$$

$$C = Q\,\frac{\partial(U+V)}{\partial x} + P\,\frac{\partial(U+V)}{\partial y} + N\,\frac{\partial(U+V)}{\partial z}\,.$$

Supponiamo ora con *Poisson* che la distribuzione degli elementi sia tale che possano riguardarsi sferiche le superficie σ' e siano sferici gli elementi magnetici. Dalle formule (9) e (10) del §. IV. avremo in questo caso

$$k_{xy} = k_{yz} = k_{xz} = 0\,,$$

$$k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = \frac{4}{3}\,\pi\,,$$

e dalle formule (15) del §. I.

$$h_1 = h_2 = h_3 = \frac{2}{3R^3}\,,\quad abc = R^3\,;$$

e quindi l'equazioni (1) divengono

$$\frac{4\pi}{3}(h-1)\,A = \frac{\partial(U+V)}{\partial x}\,,$$

$$\frac{4\pi}{3}(h-1)\,B = \frac{\partial(U+V)}{\partial y}\,,$$

$$\frac{4\pi}{3}(h-1)\,C = \frac{\partial(U+V)}{\partial z}\,.$$

Se supponiamo gli elementi distribuiti in modo che le superficie σ' possano riguardarsi come cilindri coll'asse coincidente colla direzione dell'asse magnetico, e di altezza piccolissima di fronte al raggio della base, come abbiamo veduto alla fine del paragrafo precedente, in luogo di $h-1$ nell'equazioni precedenti dovremo porre $h-3$.

Denotando con k il rapporto dello spazio occupato dagli elementi magnetici al volume del corpo, e quindi $h=\frac{1}{k}$; e ponendo nella ipotesi che σ' sia sferica

$$(2) \qquad g=\frac{3k}{4\pi(1-k)},$$

e nel caso che σ' sia cilindrica

$$(3) \qquad g=\frac{3k}{4\pi(1-3k)},$$

avremo

$$(4) \quad A=g\,\frac{\partial(U+V)}{\partial x},\ B=g\,\frac{\partial(U+V)}{\partial y},\ C=g\,\frac{\partial(U+V)}{\partial z},$$

e quindi, in ambedue le ipotesi, la distribuzione del magnetismo sarà lamellare semplice.

Quando ha luogo questa distribuzione abbiamo veduto nel §. III. che le superficie di livello rispetto alla funzione di cui A, B e C sono le derivate rapporto ad x, y, z, dividono lo spazio in lamine infinitamente sottili che hanno in ciascun punto gli assi magnetici nella direzione delle normali e i momenti magnetici proporzionali alla grossezza della lamina, quindi la superficie σ' che si deve prendere per ottenere l'azione degli elementi infinitamente vicini a un punto dello spazio interno al corpo sarà un cilindro coll'asse coincidente coll'asse magnetico e coll'altezza infinitesima di fronte al raggio della base. Dunque dell'equazione (2) e (3) è da preferirsi la (3).

Il numero k suol chiamarsi il coefficiente d' *induzione magnetica*, e il numero g determinato dalla equazione (2) o dalla (3) suol dirsi il coefficiente di *magnetizzazione per induzione*.

La funzione potenziale V del corpo magnetico K sarà

$$(5) \qquad V=\int_\sigma (A\alpha+B\beta+C\gamma)\,\frac{d\sigma}{r}+\int_S\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\frac{dS}{r}.$$

Derivando rispettivamente rapporto ad x, y, z le tre equazioni (4), sommando ed osservando che nello spazio S si ha

$$\Delta^2 U = 0\,,$$
$$\Delta^2 V = -4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right),$$

otterremo

$$(1+4\pi g)\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)=0\,.$$

Poichè $g > 0$ il primo fattore sarà differente da zero, quindi dovrà essere uguale a zero il secondo, cioè

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0\,. \tag{6}$$

Dunque la distribuzione del magnetismo indotto sarà anche solenoidale.

Sostituendo nella equazione (5) i valori (4) otterremo

$$V = g\int_\sigma \frac{\partial(U+V)}{\partial p}\frac{d\sigma}{r}\,, \tag{7}$$

e ponendo

$$\varphi = g(U+V),$$

avremo dalle (4)

$$A=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ B=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ C=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,,$$

dalla (6)

$$\Delta^2\varphi = 0\,,$$

e la equazione (7) diverrà

$$V=\int_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\sigma}{r}\,.$$

Denotando con V_e il valore di V nello spazio esterno alla superficie σ, con V_i il valore di V nello spazio interno a σ e con p la normale diretta verso l'interno di σ, dal §. VIII del Cap. I, ponendo mente alla equazione (7) avremo sopra σ

$$\frac{\partial V_e}{\partial p}-\frac{\partial V_i}{\partial p}=4\pi g\frac{\partial(U+V_i)}{\partial p}\,,$$

dalla quale, essendo le derivate di U continue attraverso la superficie σ, si deduce

$$(8) \qquad \frac{\partial(U + V_e)}{\partial p} = (1 + 4\pi g) \frac{\partial(U + V_i)}{\partial p}.$$

Se poniamo

$$(9) \qquad \mu = 1 + 4\pi g,$$

avremo dalla equazione (2)

$$\mu = \frac{1 + 2k}{1 - k}$$

e dalla (3)

$$\mu = \frac{1}{1 - 3k}.$$

Il numero μ è stato chiamato da *W. Thomson* il coefficiente di *permeabilità magnetica.*

Da quanto abbiamo esposto si raccoglie che la funzione potenziale V del magnetismo indotto nel corpo K dalle forze magnetiche, che hanno la funzione potenziale U ed emanano da punti esterni a K, ha le seguenti proprietà:

È finita e continua in tutto lo spazio, e moltiplicata per il raggio vettore r del punto a cui il suo valore si riferisce si annulla all'infinito;

Le sue derivate sono finite in tutto lo spazio, moltiplicate per r^2 si annullano all'infinito, sono continue in tutto lo spazio fuori che attraverso la superficie σ, dove hanno una discontinuità definita dalla equazione (8).

Le sue derivate seconde sodisfano in tutto lo spazio alla equazione

$$\Delta^2 V = 0.$$

Queste proprietà sono caratteristiche, cioè non vi possono essere due funzioni che le godano tutte senza essere identiche.

Infatti, supponiamo che due funzioni V' e V'' godano tutte le sopra notate proprietà. La funzione

$$W = V' - V''$$

avrà le medesime proprietà; ma dalla (8) che è sodisfatta da V' e da V'' si deduce che la equazione che definisce la discontinuità delle sue derivate alla superficie σ dev'essere

$$\frac{\partial W_e}{\partial p} = (1 + 4\pi g) \frac{\partial W_i}{\partial p}. \tag{10}$$

Moltiplicando per $W_e dS$ l'equazione

$$\Delta^2 W_e = 0,$$

integrando ed estendendo l'integrale a tutto lo spazio S_e esterno a σ, per il teorema di Green, avremo

$$0 = \int_{S_e} W_e \Delta^2 W_e \, dS = \int_\sigma W \frac{\partial W_e}{\partial p} d\sigma - \int_{S_e} \Delta W_e \, dS_e. \tag{11}$$

Moltiplicando per $W_i dS_i$ l'equazione

$$\Delta^2 W_i = 0,$$

integrando ad estendendo l'integrazione a tutto lo spazio S_i interno a σ, avremo per lo stesso teorema di Green

$$0 = \int_{S_i} W_i \Delta^2 W_i \, dS = -\int_\sigma W_i \frac{\partial W_i}{\partial p} d\sigma - \int_{S_i} \Delta W_i \, dS_i. \tag{12}$$

Moltiplicando per $1 + 4\pi g$ la equazione (12), sommandola colla (11) ed osservando la (10), otterremo l'equazione

$$\int_{S_e} \Delta W_e \, dS + (1 + 4\pi g) \int_{S_i} \Delta W_i \, dS = 0,$$

la quale poichè $1 + 4\pi g$ è una quantità positiva e W e le sue derivate sono finite e continue in tutto lo spazio S_e e in tutto lo spazio S_i, non potrà essere sodisfatta a meno che non sia

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

cioè W costante in ambidue questi spazi, e poichè all'infinito si annulla dovrà essere $W = 0$ in tutto lo spazio e quindi

$$V' = V''.$$

Quando la funzione U è costante in tutto lo spazio in cui è situato il corpo K, cioè quando cessano di agire sopra K le forze inducenti, la equazione (8) diviene

$$\frac{\partial V_e}{\partial p} = (1 + 4\pi g) \frac{\partial V_i}{\partial p},$$

e quindi V sarà uguale a zero in tutto lo spazio. Dunque la magnetizzazione di K dura soltanto finchè dura l'azione delle forze inducenti. Potrà continuare soltanto in quei corpi i cui elementi offrono una resistenza alla separazione e al moto dei fluidi magnetici, in guisa che si richieda un tempo finito prima che il magnetismo prenda lo stato di equilibrio. Per questi corpi sarà necessario anche un tempo finito perchè si magnetizzino per induzione.

Nei corpi diamagnetici le componenti dei momenti magnetici indotti hanno il segno contrario a quelli che le stesse forze inducono nei corpi paramagnetici, cioè nei corpi diamagnetici il coefficiente di magnetizzazione è negativo. Quindi ammettendo la ipotesi di *Poisson* che le superficie σ' possano riguardarsi come sfere, dalla equazione (2) avremmo per il rapporto k tra lo spazio occupato dagli elementi e il volume del corpo, un valore maggiore della unità, il che è assurdo. Questa contradizione può togliersi nel modo seguente.

Nella teoria esposta abbiamo ammesso che i corpi paramagnetici e diamagnetici siano immersi in uno spazio non magnetizzabile per induzione. Se supponiamo invece che lo spazio vuoto di materia ponderabile magnetizzabile sia ripieno di etere e questo sia magnetizzabile ed abbia un coefficiente di magnetizzazione positivo e finito, denotando con g_1 il coefficiente di magnetizzazione di K e con g_2 quello dell'etere, la funzione potenziale V invece di essere data dalla equazione (7) sarà espressa dalla seguente:

$$(13) \qquad V = g_1 \int_\sigma \frac{\partial(U + V_i)}{\partial p_i} \frac{d\sigma}{r} + g_2 \int_\sigma \frac{\partial(U + V_e)}{\partial p_e} d\sigma .$$

Dalla equazione (13) si deduce

$$(1+4\pi g_2)\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V}_e)}{\partial p}=(1+4\pi g_1)\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V}_i)}{\partial p},$$

e ponendo

$$g=\frac{g_1-g_2}{1+4\pi g_2}, \tag{14}$$

avremo la equazione

$$\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V}_e)}{\partial p}=(1+4\pi g)\frac{\partial(\mathrm{U}+\mathrm{V}_i)}{\partial p}, \tag{15}$$

la quale è identica alla (8). Poichè V dovrà avere anche tutte le altre proprietà caratteristiche sopra notate, è chiaro che questa nuova ipotesi non muta alcuna delle conseguenze. Soltanto sarà differente il significato di g. Denotando con k_1 e k_2 i coefficienti d'induzione del corpo K e dell'etere, avremo dalla equazione (2)

$$g=\frac{3(k_1-k_2)}{4\pi(1-k_1)(1+2k_2)}, \tag{16}$$

e dalla equazione (3)

$$g=\frac{3(k_1-k_2)}{4\pi(1-3k_1)}. \tag{17}$$

Quindi in ambedue le ipotesi g potrà essere negativo senza che k_1 e k_2 cessino di essere minori della unità.

Il Sig. *Maxwell* ha osservato che l'esperienze del Sig. *Thalen* danno per il ferro dolce $g=32$, e che con questo valore dalla (2) si ricaverebbe

$$k=\frac{134}{135}.$$

Dunque lo spazio occupato dagli elementi e il volume del corpo risulterebbero troppo poco differenti tra loro, perchè si potesse concepire la ipotesi di *Poisson*. Ma il valore che si ricava dalla (3), la quale abbiamo veduto che per altra ragione è da preferirsi alla (2), è

$$k=\frac{134}{403},$$

e non presenta la difficoltà notata dal Sig. *Maxwell*.

§. VIII.

Magnetizzazione di un'ellissoide in un campo magnetico uniforme

Un corpo K, la cui superficie σ è un'ellissoide di semiassi a, b, c, occupi uno spazio S in cui agisce una forza magnetica costante in intensità e direzione, cioè sia in un campo magnetico uniforme. La funzione potenziale U di questa forza magnetica costante avrà la forma seguente:

$$(1) \qquad U = G(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Denotando con V la funzione potenziale del magnetismo indotto nell'ellissoide, prendiamo per origine il centro e per assi coordinati gli assi principali dell'ellissoide e cerchiamo di costruire la funzione V in modo che abbia tutte le proprietà caratteristiche determinate nel paragrafo precedente.

Siano rispettivamente V_e e V_i i valori di V nello spazio esterno e nello spazio interno a σ e prendiamo

$$(2) \quad V_e = lx\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+a^2)D} + my\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+b^2)D} + nz\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+c^2)D},$$

$$(3) \quad V_i = lx\int_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+a^2)D} + my\int_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+b^2)D} + nz\int_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\lambda+c^2)D},$$

dove D e λ_1 hanno lo stesso significato come nel §. II.

La funzione V definita dall'equazioni (2) e (3) è finita e continua, moltiplicata per r si annulla all'infinito e sodisfa alla equazione: $\Delta^2 V=0$, e le sue derivate prime sono finite, si annullano all'infinito, e sono discontinue soltanto attraverso la superficie σ.

Basterà determinare l, m ed n in modo che sia sodisfatta sopra σ la equazione

$$(4) \qquad \frac{\partial(U+V_e)}{\partial p} = (1+4\pi g)\frac{\partial(U+V_i)}{\partial p}.$$

Dalle equazioni (1) e (2) si ricava per i punti di σ

$$\frac{\partial(U+V_e)}{\partial p}=(G\alpha+lh_1)\frac{\partial x}{\partial p}+(G\beta+mh_2)\frac{\partial y}{\partial p}+(G\gamma+nh_3)\frac{\partial z}{\partial p}$$
$$-\left(\frac{lx}{a^3bc}+\frac{my}{ab^3c}+\frac{nz}{abc^3}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p},$$

dove h_1, h_2, h_3 sono determinate dell'equazioni (9) del §. I.

Dall'equazioni (1) e (3) abbiamo

$$\frac{\partial(U+V_i)}{\partial p}=(G\alpha+lh_1)\frac{\partial x}{\partial p}+(G\beta+mh_2)\frac{\partial y}{\partial p}+(G\gamma+nh_3)\frac{\partial z}{\partial p}.$$

Sostituendo questi valori nella equazione (4) ed osservando che per $\lambda=0$ si ha

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\lambda}{\partial p}=2\frac{\partial x}{\partial p},\quad \frac{y}{b^2}\frac{\partial\lambda}{\partial p}=2\frac{\partial y}{\partial p},\quad \frac{z}{c^2}\frac{\partial\lambda}{\partial p}=2\frac{\partial z}{\partial p},$$

otterremo l'equazione

$$\left(4\pi g(G\alpha+lh_1)+\frac{2l}{abc}\right)\frac{\partial x}{\partial p}+\left(4\pi g(G\beta+mh_2)+\frac{2m}{abc}\right)\frac{\partial y}{\partial p}$$
$$+\left(4\pi g(G\gamma+nh_3)+\frac{2n}{abc}\right)\frac{\partial z}{\partial p}=0,$$

la quale sarà sodisfatta sopra tutta la superficie σ, quando si prenda

$$(5)\qquad \begin{aligned} l&=-\frac{2\pi g\,abcG\alpha}{1+2\pi gh_1abc},\\ m&=-\frac{2\pi g\,abcG\beta}{1+2\pi gh_2\,abc},\\ n&=-\frac{2\pi g\,abcG\gamma}{1+2\pi gh_3\,abc};\end{aligned}$$

onde

$$V_i=-\frac{2\pi gh_1abc}{1+2\pi gh_1abc}G\alpha x-\frac{2\pi gh_2abc}{1+2\pi gh_2abc}G\beta y-\frac{2\pi gh_3abc}{1+2\pi gh_3abc}G\gamma z$$

$$U+V_i=G\left(\frac{\alpha}{1+2\pi gh_1abc}x+\frac{\beta}{1+2\pi gh_2abc}y+\frac{\gamma}{1+2\pi gh_3abc}z\right),$$

e quindi dall'equazione (4) del paragrafo precedente si ricava

$$(6)\quad A = \frac{g}{1+2\pi g h_1 abc} G\alpha,\ B = \frac{g}{1+2\pi g h_2 abc} G\beta,\ C = \frac{g}{1+2\pi g h_3 abc} G\gamma.$$

Come nel §. XIV. del Cap. I, si trova

$$(7)\quad h_1 = \frac{2}{a^3 \mathrm{sn}^3\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{sn}^2 u du,\ h_2 = \frac{2}{a^3 \mathrm{sn}^3\alpha}\int_0^\alpha \frac{\mathrm{sn}^2 u du}{\mathrm{dn}^2 u},\ h_3 = \frac{2}{a^3 \mathrm{sn}^3\alpha}\int_0^\alpha \frac{\mathrm{sn}^2 u du}{\mathrm{cn}^2 u},$$

dove

$$c = a \mathrm{cn}\alpha,$$

e il quadrato del modulo delle funzioni ellittiche è uguale ad $\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$.

Se l'ellissoide è di rivoluzione intorno all'asse minore c, il modulo sarà uguale a zero e quindi

$$c = a\cos\alpha,$$

$$(8)\qquad h_1 = h_2 = \frac{\alpha - \mathrm{sen}\alpha\cos\alpha}{a^3 \mathrm{sen}^3\alpha},\quad h_3 = 2\,\frac{\mathrm{tang}\alpha - \alpha}{a^3 \mathrm{sen}^3\alpha},$$

Quando il rapporto $\frac{c}{a}$ è così piccolo che se ne possono trascurare le potenze superiori alla prima, poichè le h compariscono nelle formule (6) moltiplicate per c, potremo sostituire in esse i valori delle h corrispondenti a $c = 0$

Ora per $c = 0$, abbiamo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e quindi

$$h_1 = h_2 = \frac{\pi}{2a^3},\quad h_3 c = \frac{2}{a^2}.$$

Sostituendo questi valori nelle (6) avremo per un disco circolare di raggio a e di grossezza c

$$(10)\quad A = \frac{g}{1+\pi^2 g\frac{c}{a}} G\alpha,\ B = \frac{g}{1+\pi^2 g\frac{c}{a}} G\beta,\ C = \frac{g}{1+4\pi g} G\gamma.$$

Se l'ellissoide è di rivoluzione intorno all'asse maggiore a, il modulo delle funzioni ellittiche sarà uguale alla unità e quindi

$$c = \frac{a}{\cosh\alpha}$$

$$(11)\quad h_1abc = \frac{2\cosh\alpha}{\operatorname{senh}^3\alpha}(\alpha - \operatorname{tangh}\alpha),\quad h_2abc = h_3abc = \frac{\cosh\alpha}{\operatorname{senh}^3\alpha}(\operatorname{senh}\alpha\cosh\alpha - \alpha),$$

e queste quantità col diminuire del rapporto $\frac{c}{a}$ convergono verso i limiti

$$(12)\qquad h_1abc = 0\,,\quad h_2abc = h_3abc = 1\,,$$

e quindi per un'ellissoide di rivoluzione molto allungata avremo approssimativamente

$$(13)\qquad A = gG\alpha\,,\quad B = \frac{g}{1 + 2\pi g}G\beta\,,\quad C = \frac{g}{1 + 2\pi g}G\gamma\,.$$

Se l'ellissoide si riduce a una sfera, avremo

$$h_1 = h_2 = h_3 = \frac{2}{3R^3}\,,$$

e quindi

$$(14)\quad A = \frac{g}{1 + \frac{4\pi}{3}g}G\alpha\,,\quad B = \frac{g}{1 + \frac{4}{3}\pi g}G\beta\,,\quad C = \frac{g}{1 + \frac{4}{3}\pi g}G\gamma\,.$$

§. IX.

Induzione magnetica in un corpo terminato da due superficie sferiche concentriche.

Sia K un corpo terminato da due superficie sferiche concentriche σ e σ_1; R ed R_1 siano i raggi rispettivi di queste sfere ed R sia maggiore di R_1. Denotiamo con S_e lo spazio esterno ad ambedue le sfere, con S_i lo spazio compreso tra σ e σ_1

e con $S_{i'}$ lo spazio racchiuso da σ_1. Prendiamo il centro delle due sfere per polo di un sistema di coordinate polari.

La funzione potenziale U delle forze magnetiche inducenti, le quali emanano da punti situati negli spazi S_e ed $S_{i'}$, sia esprimibile in serie, convergente in ugual grado, di funzioni sferiche e di potenze intere del raggio vettore r, in tutto un campo in cui sia contenuto l'intiero corpo K e non contenga punti d'onde emanano forze magnetiche. Poichè U in questo campo deve sodisfare alla equazione: $\Delta^2 U = 0$, sarà

$$(1) \qquad U = \sum_0^\infty (Y_n r^n + Z_n r^{-n-1}),$$

dove Y_n e Z_n denotano funzioni sferiche di ordine n.

Per determinare la funzione potenziale del magnetismo indotto nel corpo K, basterà costruire serie convergenti tali che la funzione V che esse rappresentano nelle tre parti dello spazio S_e, $S_{i'}$ ed S_i, goda di tutte le proprietà caratteristiche determinate nel §. VII.

La funzione V sodisfarà in tutto lo spazio alla equazione: $\Delta^2 V = 0$, se le serie che l'esprimono hanno tutte la forma

$$V = \sum_0^\infty \{(a_n Y_n + a'_n Z_n) r^n + (b_n Y_n + b'_n Z_n) r^{-n-1}\}.$$

Ma V moltiplicata per r deve annullarsi all'infinito, conservandosi nello spazio S_e sempre finita e continua; dunque nello spazio S_e la serie che la esprime dovrà contenere potenze negative di r maggiori della prima, ed avrà la forma

$$(2) \qquad V_e = \sum_1^\infty (B_n Y_n + B'_n Z_n) r^{-n-1}.$$

Nello spazio $S_{i'}$ la funzione V deve conservarsi sempre finita e continua anche per $r=0$; dunque la serie che n'esprime i valori non potrà contenere potenze negative di r, e quindi in $S_{i'}$ avremo

$$(3) \qquad V_{i'} = \sum_0^\infty (E_n Y_n + E'_n Z_n) r^n.$$

Nello spazio S_i la serie potrà contenere potenze positive e negative di r, e avrà la forma

$$(4)\qquad V_i = \sum_0^{\infty} [(C_n Y_n + C'_n Z_n) r^n + (D_n Y_n + D'_n Z_n) r^{-n-1}] .$$

Dovendo V essere continua in tutto lo spazio, per $r = R$ sarà

$$V_e = V_i ,$$

e quindi

$$(5)\qquad B_n = D_n + C_n R^{2n+1}$$

$$(6)\qquad B'_n = D'_n + C'_n R^{2n+1} ,$$

e per $r = R_1$ sarà

$$V_i = V_{e'} ,$$

onde

$$(7)\qquad E_n R_1^{2n+1} = D_n + C_n R_1^{2n+1} ,$$

$$(8)\qquad E'_n R_1^{2n+1} = D'_n + C'_n R_1^{2n+1} ,$$

Ora sopra la superficie σ, con i valori (1), (2) e (4), abbiamo

$$\frac{\partial(U+V_e)}{\partial p} = \frac{\partial(U+V_e)}{\partial r} = \sum_1^{\infty} \left[(nR^{2n+1} - (n+1)B_n) \frac{Y_n}{R^{n+2}} - (n+1)(B'_n+1) \frac{Z_n}{R^{n+2}} \right],$$

$$\frac{\partial(U+V_i)}{\partial p} = \frac{\partial(U+V_i)}{\partial r} = \sum_0^{\infty} \Big\{ [n(C_n+1) R^{2n+1} - (n+1) D_n] \frac{Y_n}{R^{n+2}} +$$

$$[nC'_n R^{2n+1} - (n+1)(1+D'_n)] \frac{Z_n}{R^{n+2}} \Big\} .$$

La equazione:

$$\frac{\partial(U+V_e)}{\partial p} - (1 + 4\pi g) \frac{\partial(U+V_i)}{\partial p} = 0 ,$$

sarà sodisfatta da questi valori, quando siano uguali a zero tutti i coefficienti delle funzioni sferiche Y_n e Z_n dello stesso ordine n, cioè quando avremo

$$(9)\quad (n+1)[(1+4\pi g)D_n - B_n] - n(1+4\pi g)C_n R^{2n+1} = 4\pi g n R^{2n+1} ,$$

$$(10)\quad (n+1)[(1+4\pi g)D'_n - B'_n] - n(1+4\pi g)C'_n R^{2n+1} = -4\pi g(n+1) .$$

Sopra la superficie σ_1 con i valori (1), (3) e (4), abbiamo

$$-\frac{\partial(U+V_e')}{\partial p}=\frac{\partial(U+V_e')}{\partial r}=\sum_0^\infty\left[n(E_n+1)R_1^{2n+1}\frac{Y_n}{R_1^{n+2}}+\right.$$
$$\left.[nE'_nR_1^{2n+1}-(n+1)]\frac{Z_n}{R_1^{n+2}}\right],$$

$$-\frac{\partial(U+V_i)}{\partial p}=\frac{\partial(U+V_i)}{\partial r}=\Sigma\left[[n(C_n+1)R_1^{2n+1}-(n+1)D_n]\frac{Y}{R_1^{n+2}}+\right.$$
$$\left.[nC'_nR_1^{2n+1}-(n+1)(D'_n+1)]\frac{Z_n}{R_1^{n+2}}\right].$$

e la equazione:

$$\frac{\partial(U+V_e')}{\partial p}-(1+4\pi g)\frac{\partial(U+V_i)}{\partial p}=0,$$

sarà sodisfatta in ogni punto di σ_1, quando siano verificate l'equazioni

(11) $(n+1)(1+4\pi g)D_n+nE_nR_1^{2n+1}-n(1+4\pi g)C_nR_1^{2n+1}=4\pi gnR_1^{2n+1}$,

(12) $(n+1)(1+4\pi g)D'_n+nE'_nR_1^{2n+1}-n(1+4\pi g)C'_nR_1^{2n+1}=-4\pi g(n+1)$.

Sostituendo i valori (5) e (7) nell'equazioni (9) e (11), otterremo

$$(13)\quad \begin{array}{l} 4\pi g(n+1)D_n-(2n+1+4\pi gn)C_nR^{2n+1}=4\pi gnR^{2n+1}, \\ (2n+1+4\pi g(n+1))D_n-4\pi gn\,C_nR_1^{2n+1}=4\pi gnR_1^{2n+1}, \end{array}$$

e sostituendo i valori (6) e (8) nell'equazioni (10) e (12) avremo

$$(14)\quad \begin{array}{l} 4\pi g(n+1)D'_n-(2n+1+4\pi gn)C'_nR^{2n+1}=-4\pi g(n+1), \\ (2n+1+4\pi g(n+1))D'_n-4\pi gn\,C'_nR_1^{2n+1}=-4\pi g(n+1). \end{array}$$

Ponendo

$$\frac{R_1}{R}=t,$$

$$(15)\quad \begin{array}{l} q_n=(2n+1)^2(1+4\pi g)+(4\pi g)^2n(n+1)(1-t^{2n+1}), \\ c_n=4\pi gn[2n+1+4\pi g(n+1)(1-t^{2n+1})], \\ d_n=4\pi gn(2n+1), \end{array}$$

dall'equazioni (13) si ricava

$$(16) \qquad C_n = -\frac{c_n}{q_n}, \quad D_n = \frac{d_n R_1^{2n+1}}{q_n};$$

e ponendo

$$(17) \qquad \begin{aligned} b_n &= 4\pi g n\,[2n+1+4\pi g\,(n+1)]\,(1-t^{2n+1}), \\ e_n &= (4\pi g)^2\, n(n+1)\,(1-t^{2n+1}), \end{aligned}$$

dall'equazioni (5) e (7) abbiamo

$$(18) \qquad B_n = -\frac{b_n R^{2n+1}}{q_n}, \quad E_n = -\frac{e_n}{q_n}.$$

Se poniamo

$$(19) \qquad \begin{aligned} c'_n &= 4\pi g\,(n+1)\,(2n+1), \\ d'_n &= 4\pi g\,(n+1)\,[2n+1+4\pi g n]\,(1-t^{2n+1}), \end{aligned}$$

dall'equazioni (14) si ricava

$$(20) \qquad C'_n = \frac{c'_n}{q_n}\,\frac{1}{R^{2n+1}}, \quad D'_n = -\frac{d'_n}{q_n},$$

Sostituendo nell'equazioni (6) e (8) e ponendo

(21) $b'_n = e_n\,, \quad e'_n = 4\pi g(n+1)\,[2n+1+4\pi g n)]\,(1-t^{2n+1}),$
abbiamo

$$(22) \qquad B'_n = -\frac{e_n}{q_n}, \quad E'_n = \frac{e'_n}{q_n}\,\frac{1}{R_1^{2n+1}}.$$

Se sostituiamo i valori (16), (18), (20) e (22) nell'equazioni (2), (3) e (4) otterremo

$$(23) \qquad \begin{aligned} V_e &= -\sum_1^\infty \frac{b_n}{q_n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n R^n - \sum_1^\infty \frac{e_n}{q_n}\,\frac{Z_n}{r^{n+1}}, \\ V_{e'} &= -\sum_0^\infty \frac{e_n}{q_n}\, Y_n r^n + \sum_0^\infty \frac{e'_n}{q_n}\left(\frac{r}{R_1}\right)^n \frac{Z_n}{R_1^{n+1}}, \\ V_i &= -\sum \frac{c_n}{q_n}\, Y_n r^n + \sum \frac{d_n}{q_n}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} Y_n R_1^n \\ &\quad + \sum \frac{c'_n}{q_n}\left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{Z_n}{R^{n+1}} - \sum \frac{d'_n}{q_n}\,\frac{Z_n}{r^{n+1}}. \end{aligned}$$

Rammentando che abbiamo supposto convergenti in ugual grado le serie: $\Sigma Y_n r^n$ e $\Sigma \frac{Z_n}{r^{n+1}}$ finchè r non è maggiore di R nè minore di R_1, ed osservando che le quantità: b_n, c_n, d_n, e_n, b'_n, c'_n, d'_n, e'_n, sono tutte minori di q_n, se ne deduce immediatamente che sono ugualmente convergenti tutte le serie che compariscono nell'equazioni (23).

Quando i punti dai quali emanano le forze magnetiche sono tutti situati nello spazio S_e, avremo

$$Z_n = 0\,,$$

e quindi dall'equazioni (1) e (23) si ha per la funzione potenziale di tutta l'azione magnetica nello spazio $S_{e'}$, la espressione

$$U + V_{e'} = \Sigma \frac{q_n - e_n}{q_n} Y_n r^n = \Sigma \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 g^2}{1 + 4\pi g}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)(1 - t^{2n+1})} Y_n r^n\,,$$

la quale, quando g è un numero grande (per il ferro dolce è uguale a 32), e la grossezza dell'involucro non è piccola, ci dice che l'azione nello spazio $S_{e'}$ chiuso dall'involucro è una piccola frazione dell'azione che eserciterebbero nello spazio $S_{e'}$ le forze inducenti, se non vi fosse l'involucro K.

Quando i punti d' onde emanano le forze inducenti sono situati nello spazio $S_{e'}$, sarà, qualunque sia l'intero n,

$$Y_n = 0\,,$$

e dall'equazioni (1) e (23) avremo

$$U + V_e = \Sigma \frac{q_n - e_n}{q_n} \frac{Z_n}{r^{n+1}}\,.$$

Quindi l'azione nello spazio S_e sarà, nel medesimo caso rispetto a g e a t, una piccola frazione dell'azione che eserciterebbero nello spazio S_e le forze inducenti se non vi fosse l'involucro K.

Quando il corpo K è una sfera piena, cioè quando

$$R_1 = 0,\; Z_n = 0\,,$$

e quindi anche

$$t = 0,$$

l'equazioni (15) divengono

$$q_n = (2n + 1 + 4\pi g(n + 1))(2n(1 + 2\pi g) + 1),$$
$$c_n = 4\pi g n(2n + 1 + 4\pi g(n + 1)),$$

e la prima delle (17) dà

$$b_n = c_n.$$

Onde

$$V_e = -\frac{2\pi g}{(1+2\pi g)R}\Sigma Y_n\left(\frac{R^2}{r}\right)^{n+1} + \frac{2\pi g}{(1+2\pi g)R}\Sigma\frac{Y_n}{2n(1+2\pi g)+1}\left(\frac{R^2}{r}\right)^{n+1},$$
$$V_i = -\frac{2\pi g}{1+2\pi g}\Sigma Y_n r^n + \frac{2\pi g}{1+2\pi g}\Sigma\frac{1}{2n(1+2\pi g)+1}Y_n r^n.$$

§. V.

Teoria dei dielettrici.

Per ispiegare la influenza che nei fenomeni elettrici esercitano i mezzi coibenti attraverso i quali si propaga l'azione della elettricità, si è supposto che questi mezzi, i quali si dicono *dielettrici*, siano composti di elementi conduttori isolati in uno spazio perfettamente coibente. Le forze elettriche in questa ipotesi esercitano sopra i mezzi dielettrici un'induzione identica a quella che nei corpi magnetizzabili per induzione esercitano le forze magnetiche. Lo stato elettrico che prendono gli elementi di un dielettrico sotto l'azione di date forze inducenti si chiama *polarizzazione dielettrica*, e il numero g che esprimeva il coefficiente di magnetizzazione per induzione, quando si tratta di dielettrici si chiama coefficiente di *polarizzazione dielettrica*. Il primo ad applicare alla teoria dei dielettrici l'analisi trovata da *Poisson* per la induzione magnetica fu *O. F. Mossotti*. La Memoria che contiene questa applicazione è nel Tomo XXIV. degli

Atti della Società Italiana delle Scienze. Il sig. *Clausius* ne ha dedotta la spiegazione della scarica di ritorno nella Tavola di Franklin.

Siano $K_1, K_2, \ldots K_n$ n corpi conduttori situati in uno spazio perfettamente coibente ripieno dai dielettrici $H_1, H_2, \ldots H_m$, e g_s sia il coefficiente di polarizzazione del mezzo H_s. Denotiamo con $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ le superficie che formano rispettivamente i contorni di $K_1, K_2, \ldots K_n$, e con σ_{rs} la superficie che separa il dielettrico H_r dal dielettrico H_s. Siano comunicate ai corpi conduttori $K_1, K_2, \ldots K_n$ le masse elettriche $E_1, E_2, \ldots E_n$, le porzioni $h_1, h_2, \ldots h_p$ dei coibenti H siano elettrizzate e in esse le densità elettriche siano rispettivamente $\rho'_1, \rho'_2, \ldots \rho'_p$. Denotiamo con U la funzione potenziale della elettricità libera dei conduttori e dei coibenti e con V la funzione potenziale delle forze che risultano dalla polarizzazione dei dielettrici H. Sopra una qualunque delle superficie σ_i, denotando con c_i quantità costanti, avremo

$$(1) \qquad U + V = c_i\,;$$

e in tutto lo spazio dove non è elettricità libera

$$(2) \qquad \Delta^2 U = 0\,.$$

In uno spazio h_s ripieno del dielettrico H_s in cui si trova elettricità libera colla densità ρ'_s, sarà

$$(3) \qquad \Delta^2 U = 4\pi\rho'_s\,.$$

Ma le componenti secondo i tre assi dei momenti di polarizzazione dielettrica vi saranno dati dall'equazioni

$$(4) \qquad A = g_s \frac{\partial(U+V)}{\partial x}\,,\; B = g_s \frac{\partial(U+V)}{\partial y}\,,\; C = g_s \frac{\partial(U+V)}{\partial z}$$

e dalla espressione di V data dalla equazione (5) del §. VII. si ricava

$$(5) \qquad \Delta^2 V = -4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Derivando successivamente le (4) rispetto ad x, y, z, e sommandole, si ottiene

$$(6) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = g_s \Delta^2(U + V)\,.$$

Sottraendo la equazione (6) moltiplicata per 4π dalla (5) e sommando prima colla (2), poi colla (3), avremo nello spazio dove non è elettricità libera

$$\Delta^2(U + V) = 0\,,$$

e nello spazio h_s

$$(7) \qquad \Delta^2(U + V) = \frac{4\pi\rho'_s}{1 + 4\pi g_s}\,.$$

Se denotiamo con ρ_i la densità elettrica sopra la superficie σ_i del conduttore K_i, con p_i la normale a σ_i diretta verso lo spazio esterno al corpo K_i e distinguiamo rispettivamente cogli indici e ed i i valori di U e V nello spazio esterno ed interno a K_i, avremo

$$(8) \qquad \frac{\partial U_e}{\partial p_i} - \frac{\partial U_i}{\partial p_i} = 4\pi\rho_i\,,$$

e se il dielettrico a contatto con σ_i è H_s

$$(9) \qquad \frac{\partial V_i}{\partial p_i} - \frac{\partial V_e}{\partial p_i} = 4\pi g_s \frac{\partial(U_e + V_e)}{\partial p_i}\,.$$

Essendo $U_i + V_i$ costante in tutto lo spazio occupato da K_i, avremo

$$(10) \qquad \frac{\partial(U_i + V_i)}{\partial p_i} = 0\,.$$

Sottraendo l'equazione (9) dalla (8) e sommando colla (10), si otterrà

$$(11) \qquad \frac{\partial(U + V)}{\partial p_i} = \frac{4\pi\rho_i}{1 + 4\pi g_s}\,.$$

Sopra la superficie σ_{rs} che separa il dielettrico H_r da H_s, dalle equazioni (14) e (15) del §. VII, avremo

$$(12) \qquad \frac{\partial(U_r + V_r)}{\partial p_i} = \left(1 + \frac{4\pi\,(g_s - g_r)}{1 + 4\pi g_r}\right)\frac{\partial(U_s + V_s)}{\partial p_i}\,.$$

Supponiamo ora tutti i conduttori K in uno spazio coibente ripieno di un mezzo dielettrico omogeneo H, che abbia g per coefficiente di polarizzazione. Ponendo

$$U + V = W ,$$

dalla equazione (2) avremo

$$\Delta^2 W = 0 , \tag{13}$$

dalla (7) nello spazio h_s:

$$\Delta^2 W = \frac{4\pi\rho'_s}{1+4\pi g} \tag{14}$$

e dalle (1) e (11), sopra σ_i;

$$W = c_i , \; \frac{\partial W}{\partial p_i} = \frac{4\pi \rho_i}{1+4\pi g} . \tag{15}$$

L'equazioni (13), (14) e (15) colle altre proprietà della funzione W sono le caratteristiche della funzione potenziale delle masse elettriche $\frac{E_1}{1+4\pi g}$, $\frac{E_2}{1+4\pi g}$, ... $\frac{E_n}{1+4\pi g}$, in equilibrio sopra i conduttori K_1, K_2, ... K_n e delle masse

$$\frac{1}{1+4\pi g}\int \rho'_s dS ,$$

situate negli spazi h_s. Dunque se lo spazio fosse ripieno di un dielettrico che avesse un coefficiente di polarizzazione uguale a g, il valore della funzione potenziale di date masse elettriche sarebbe uguale a quello che si ottiene quando si suppone lo spazio coibente non polarizzabile, diviso per $1 + 4\pi g$. Dunque un punto in cui è concentrata una massa E eserciterebbe sopra un punto in cui è concentrata la massa uguale all'unità, un'azione uguale a

$$\frac{E}{1+4\pi g}\frac{1}{r^2} ,$$

e un punto in cui è concentrata la massa E sopra un punto in cui è concentrata la massa E′ eserciterebbe un'azione data da

$$\frac{EE'}{1+4\pi g}\frac{1}{r^2}.$$

Quindi nell'ipotesi dello spazio ripieno di un dielettrico polarizzabile, le masse elettriche eserciterebbero un'azione uguale a quella che si avrebbe senza questa ipotesi, quando le masse stesse fossero ridotte nel rapporto della unità all'unità divisa per $\sqrt{1+4\pi g}$. Questa osservazione è dovuta a *Helmholtz*.

Determiniamo ora le mutazioni da farsi alla teoria dei condensatori che abbiamo esposta nel §. XVI. del Cap. II, quando si supponga che lo strato coibente abbia un coefficiente di polarizzazione dielettrica g differente da zero. Conserviamo le notazioni di quel paragrafo; soltanto denotiamo con H invece che con C lo spazio occupato dallo strato coibente, con c invece che con g la grossezza di questo strato; e con U invece che con V la funzione potenziale della elettricità libera. Se rappresentiamo con V la funzione della polarizzazione del dielettrico H, dovremo sostituire nelle formule trovate in quel paragrafo U + V a V, $\frac{\rho'}{1+4\pi g}$ a ρ' e $\frac{\rho}{1+4\pi g}$ a ρ. Siano u e v i valori di U e V sopra σ ed u', v' i valori di U e V sopra σ', avremo

$$16)\qquad u+v=h\,,\; u'+v'=h'\,,$$

$$(17)\qquad \frac{\rho' d\sigma'}{1+4\pi g}=\frac{h-h'}{4\pi c}\,dS\,,\; \frac{\rho d\sigma}{1+4\pi g}=-\frac{h-h'}{4\pi c}\,dS\,.$$

Integrando le ultime due equazioni ed estendendo gli integrali a tutta la superficie s, otterremo

$$(18)\qquad h-h'=\frac{4\pi c}{s}\,\frac{E'}{1+4\pi g}=-\frac{4\pi c}{s}\,\frac{E}{1+4\pi g}\,.$$

Se denotiamo con τ la porzione della superficie del coibente che non è a contatto nè collo strato conduttore K nè collo strato conduttore K', la funzione V del coibente polarizzato sarà data dalla formula:

$$V = g\int_\sigma \frac{\partial(U+V)}{\partial p}\frac{d\sigma}{r} + g\int_{\sigma'} \frac{\partial(U+V)}{\partial p}\frac{d\sigma'}{r} + g\int_\tau \frac{\partial(U+V)}{\partial p}\frac{d\tau}{r},$$

la quale, osservando che in tutto lo spazio occupato dal dielettrico è sodisfatta la equazione

$$\Delta^2(U+V)=0,$$

applicando il teorema di *Green*, diviene

$$V=g\int_\sigma (u+v)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\sigma + g\int_{\sigma'}(u'+v')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\sigma' + g\int_\tau (U+V)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\tau\,.$$

Se denotiamo con ω_σ, $\omega_{\sigma'}$ le grandezze apparenti delle superficie σ e σ' vedute dal punto a cui il valore di V si riferisce e poniamo mente all'equazioni (16), avremo

$$V = g\,(h\omega_\sigma + h'\omega_{\sigma'}) + g\int_\tau (U+V)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial p}d\tau.$$

Se ci contentiamo della prima approssimazione, cioè se trascuriamo i termini dell'ordine di grandezza del rapporto dello strato coibente alla dimensione lineare del conduttore, ossia dell'ordine di grandezza di $\frac{e}{\sqrt{s}}$, potremo lasciare l'ultimo termine, e avremo

$$V = g(h\omega_\sigma + h'\omega_{\sigma'}).$$

Sopra σ sarà

$$\omega_\sigma = -2\pi\,,\ \omega_{\sigma'} = 2\pi,$$

onde

(19) $$v = -2\pi g(h-h')$$

sopra σ'

$$\omega_\sigma = 2\pi\,, \quad \omega_{\sigma'} = -2\pi$$

e quindi

(20) $$v' = 2\pi g\,(h - h')\,.$$

Sottraendo l'equazione (20) dalla (19), otterremo l'equazione

(21) $$v - v' = -4\pi g\,(h - h')$$

dalla quale, ponendo mente alla (18), si ricava

(22) $$v - v' = \frac{4\pi c}{s}\,\frac{4\pi g}{1 + 4\pi g}\,\mathrm{E}\,,$$

ed osservando l'equazione (16), si ottiene anche

(23) $$v - v' = -\frac{4\pi g}{1 + 4\pi g}\,(u - u')\,.$$

Se poniamo in comunicazione i due conduttori, avverrà un moto dell'elettricità da un conduttore all'altro in guisa che il valore della funzione potenziale si riduca uguale a una medesima costante sopra ambidue, cioè avverrà una *scarica*, e se la comunicazione si mantiene per un tempo tanto breve che durante il medesimo la polarizzazione del dielettrico non possa mutarsi come dovrebbe, rimarrà sopra i due conduttori ancora elettricità libera dopo la scarica, e se denotiamo con U_1 la funzione potenziale di questa elettricità libera, e con u_1 ed u'_1 i valori di U_1 sopra σ e σ', dovremo avere

$$u_1 + v = u'_1 + v'\,,$$

ossia

$$u_1 - u'_1 = -(v - v') = -\frac{4\pi c}{s}\,\frac{4\pi g}{1 + 4\pi g}\,\mathrm{E}\,.$$

Se E_1 ed E'_1 sono le masse di elettricità rimaste sopra σ e σ', sarà

(24) $$\mathrm{E}'_1 = -\mathrm{E}_1 = \frac{u_1 - u'_1}{4\pi c}\,s = -\frac{4\pi g}{1 + 4\pi g}\,\mathrm{E}\,.$$

Tolta la comunicazione tra i due strati conduttori, lasciamo il condensatore a sè stesso per un tempo abbastanza prolungato, perchè il dielettrico prenda la polarizzazione dovuta alle forze elettriche che emanano dall' elettricità libera rimasta sopra le superficie σ e σ'. Se V_1 è la funzione potenziale del coibente così polarizzato, v_1 e v'_1 sono i valori di V_1 sopra σ e σ', otterremo dall'equazioni (22) e (23)

$$v_1 - v_1' = \frac{4\pi c}{s} \frac{4\pi g}{1+4\pi g} E_1 .$$

$$v_1 - v'_1 = - \frac{4\pi g}{1+4\pi g} (u_1 - u'_1) .$$

Dopo una nuova scarica, rimarranno sopra i due conduttori le masse di elettricità libera E_2 ed E'_2, che saranno date dall' equazioni

$$E'_2 = - E_2 = - \frac{4\pi g}{1+4\pi g} E_1 = - \left(\frac{4\pi g}{1+4\pi g}\right)^2 E ;$$

e così seguitando. Abbiamo in questo modo, senza caricare nuovamente il conduttore, una serie di scariche cioè le così dette *scariche di ritorno*. Le masse elettriche che rimangono sopra i condensatori dopo le scariche successive formano una progressione geometrica di cui la ragione è il numero

$$\frac{4\pi g}{1+4\pi g} .$$

Per determinare la legge con cui decresce l' energia delle scariche successive basterà determinare i successivi potenziali del condensatore. Il potenziale P di tutto il sistema sarà uguale alla metà dell'integrale della funzione potenziale U + V sopra la elettricità libera, più il potenziale Q del dielettrico. Ma dall'equazioni (11) e (12) del §. VI ponendo mente ai valori (2) e (3) di g trovati nel §. VII, si ricava

$$Q = \frac{1}{2}\int_H \left(\frac{\partial(U+V)}{\partial x} A + \frac{\partial(U+V)}{\partial y} B + \frac{\partial(U+V)}{\partial z} C - \frac{1}{g}(A^2+B^2+C^2)\right) dS .$$

e sostituendo i valori di A, B, C dati dalle (4), abbiamo

$$Q = 0 .$$

Dunque sara

$$P = \frac{1}{2}\int_\sigma (u+v)\rho d\sigma + \frac{1}{2}\int (u'+v')\rho' d\sigma' = \frac{1}{2}(hE + h'E') = \frac{1}{2}E(h-h'),$$

ed osservando l'equazione (18) si ha finalmente

$$P = -\frac{4\pi c}{s}\,\frac{E^2}{1+4\pi g} .$$

Il potenziale del condensatore dopo la prima scarica sarà

$$P_1 = -\frac{4\pi c}{s}\,\frac{E^2_1}{1+4\pi g} = -\frac{4\pi c}{s}\left(\frac{4\pi g}{1+4\pi g}\right)^2 \frac{E^2}{1+4\pi g} ,$$

onde l'energia della prima scarica sarà data dall'equazione

$$P_1 - P = \frac{4\pi c}{s}\,\frac{E^2}{1+4\pi g}\left(1-\left(\frac{4\pi g}{1+4\pi g}\right)^2\right) ;$$

e se P_2 è il potenziale dopo la seconda scarica, l'energia di questa sarà

$$P_2 - P_1 = \frac{4\pi c}{s}\,\frac{E}{1+4\pi g}\left(\frac{4\pi g}{1+4\pi g}\right)\left(1-\left(\frac{4\pi g}{1+4\pi g}\right)^2\right) ,$$

e così seguitando, quindi anche l'energie delle successive scariche sono in progressione geometrica, colla ragione

$$\left(\frac{4\pi g}{1+4\pi g}\right)^2 .$$

FINE

INDICE DEL VOLUME

Prefazione . . . . Pag. V

CAPITOLO PRIMO

FUNZIONI POTENZIALI E POTENZIALI

§. I. Funzione potenziale di un sistema qualunque di elementi materiali Pag. 1
« II. Trasformazione della espressione Δ^2 . . . . « 6
« III. Funzione potenziale di una massa compresa tra due sfere concentriche . . . . « 10
« IV. Funzione potenziale di una superficie sferica omogenea. . . . « 14
« V. Funzione potenziale di una linea retta omogenea . . . . . . « 16
« VI. Funzione potenziale nello spazio occupato dalla massa attraente. « 17
« VII. Derivate prime della funzione potenziale di un corpo . . . . « 22
« VIII. Derivate prime della funzione potenziale di una superficie . . . « 26
« IX. Derivate seconde della funzione potenziale di un corpo. . . . « 31
« X. Caratteristiche delle funzioni potenziali . . . . « 34
« XI. Teorema di *Green* . . . . « 39
« XII. Funzione potenziale di un doppio strato . . . . « 48
« XIII. Superficie e strati di livello . . . . « 58
« XIV. Funzione potenziale di una massa compresa tra due ellissoidi omotetiche. . . . . « 67 [illegible]
« XV. Funzione potenziale di un'ellisse . . . . « 85
« XVI. Funzione potenziale di un'area piana omogenea. . . . . . . « 94
« XVII. Funzione potenziale di un poliedro omogeneo . . . . « 100
« XVIII. Funzione potenziale di un cilindro retto omogeneo . . . . . « 103
« XIX. Principio delle imagini di *Thomson* . . . . « 107
« XX. Potenziali . . . . « 116
« XXI. Massimi e minimi delle funzioni potenziali . . . . « 134
« XXII. Sistemi di masse che hanno un potenziale finito . . . . . . « 141
« XXIII. Linee di forza. . . . . « 150

CAPITOLO SECONDO

ELETTROSTATICA

§ I. Ipotesi fondamentale. Pag. 161
« II. Stato di equilibrio elettrico sopra un numero qualunque di conduttori . . . . « 163
« III. Funzione potenziale di un numero qualunque di conduttori e di coibenti elettrizzati . . . . « 172
« IV. Potenziali di un numero qualunque di corpi elettrizzati . . . . « 176
« V. Distribuzione della elettricità sopra una sfera conduttrice . . . « 180
Così dispost. « VI. Coordinate piane ortogonali isoterme . . . . « 187
« VII. Distribuzione della elettricità in equilibrio sopra due sfere conduttrici in presenza una dell'altra . . . . « 197
« VIII. Determinazione dell'azione reciproca di due sfere conduttrici elettrizzate . . . . « 215
« IX. Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due sfere conduttrici in contatto . . . . « 220
« X. Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un conduttore la cui superficie è formata da due calotte sferiche . . . . . « 223
« XI. Metodo delle imagini . . . . « 229
« XII. Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un'ellissoide conduttrice . . . . « 233
« XIII. Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra un disco e sopra un filo conduttori . . . . « 238
« XIV. Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra una calotta sferica conduttrice . . . . « 241
« XV. Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due cilindri conduttori indefiniti che hanno le generatrici parallele . . . . « 263
« XVI. Condensatori . . . . « 275

CAPITOLO TERZO

MAGNETISMO

§. I. Ipotesi fondamentale . . . . Pag. 290
« II. Funzione potenziale di un corpo magnetico . . . . « 298
« III. Distribuzione degli assi e dei momenti magnetici in un corpo magnetico. . . . . « 304
« IV. Componenti della forza magnetica. . . . . « 313
« V. Momenti magnetici ed assi di un corpo magnetico . . . . . . « 320
« VI. Potenziali magnetici . . . . « 323
« VII. Induzione magnetica . . . . « 327
« VIII. Magnetizzazione di un'ellissoide in un campo magnetico uniforme . « 336
« IX. Induzione magnetica in un corpo terminato da due superficie sferiche concentriche . . . . « 339
« X. Teorica dei dielettrici . . . . « 345

ERRATA			CORRIGE
Pag.	Verso		
5,	13	$M\cos^2 A$, $M\operatorname{sen}^2 A\cos^2 B$, $M\operatorname{sen}^2 A\operatorname{sen}^2 B$	$M\cos^3 A$, $M\operatorname{sen}^3 A\cos^3 B$, $M\operatorname{sen}^3 A\operatorname{sen}^3 B$
13,	3	$-\frac{4}{3}\pi\rho R$	$-\frac{4}{3}\pi\rho R+\frac{4}{3}\pi\rho R^2$
„	4	$-\frac{4}{3}\pi\rho R$	$-\frac{4}{3}\pi\rho R+\frac{4}{3}\pi\rho R^2$
21,	21	$\lim_{z=0}\frac{z}{R}\frac{\left(\frac{\rho}{r\cos\lambda}-\rho_0\right)}{z}=\lim_{z=0}\frac{R}{z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho}{\cos\lambda}$	$\lim_{z=0}\frac{z}{R}\frac{\left(\frac{R}{r}\frac{\rho}{\cos\lambda}-\rho_0\right)}{z}=\lim\frac{z}{R}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho}{\cos\lambda}$
26,	16	§. III.	§. IV.
30,	13	$z'=t^{1+\mu}$, $\frac{\partial z'}{\partial t}=m_1 t\mu$	$z'=t^{1+\mu}$, $\frac{\partial z'}{\partial t}=m_1 t^{\mu}$
„	31	l'interno	l'esterno
44,	16	nel punto m'	nel punto m' se m' è sopra la superficie
46,	2	(12)	(14)
50,	13	$V_e=2\pi\mu$	$V_e=2\pi\mu+V'$
„	14	$V_i=2\pi\mu$	$V_i=2\pi\mu+V'$
„	16	$V_e=\omega\mu$	$V_e=\omega\mu+V'$
„	17	$V_i=-(4\pi-\omega)\mu$	$V_i=-(4\pi-\omega)\mu+V'$
53,	15	$\int_\sigma \mu d\sigma$	$\int_\sigma \mu\cos(rp)d\sigma$
54,	3	$\frac{3b^2}{r^3}$, $\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}=\frac{3c^2}{r^3}$	$\frac{3ab}{r^3}$, $\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}=\frac{3ac}{r^3}$
„	5	$3b^2\beta+3c^2\gamma$	$3ab\beta+3ac\gamma$
60,	17	$\lim_{r=\infty}\Psi rV=M$, $\lim_{r=\infty}\Psi r\sqrt{\Delta V}=0$.	$\lim_{r=\infty} rV=M$, $\lim_{r=\infty} r\sqrt{\Delta V}=0$

61, 15	$\lim_{r=\infty}\int_{\lambda}^{\lambda_0}$	$\lim_{r=\infty} r\int_{\lambda}^{\lambda_0}$
75, 11	$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{4}{3}\pi abch^3\right)$	$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{4}{3}\pi abch^3\right)dh$
76, 5	$\frac{\partial}{\partial k}(\pi abk^2)$	$\frac{\partial}{\partial k}(\pi abk^2)\,dk$
79, 15	$\pi F(0)\sqrt{\Delta\lambda}$	$\frac{1}{4}F(0)\sqrt{\Delta\lambda}$
95, 20	$\frac{\partial V}{\partial z}=V\int_s$	$\frac{\partial v}{\partial z}=\int_s$
96, 5	la distanza	la distanza della projezione sul piano
" 15	$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n'}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n'}=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n'}$	$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}=-\frac{q}{r^3}$
106, 15	$=-4\pi\rho$	$-4\pi\rho$
131, 9	(19)	(25)
134, 9	(22)	(32)
159, 10	$\frac{H_1}{H_2}$	$\frac{H_2}{H_1}$
165, 18	Σ_i	$\frac{1}{2}\Sigma_i$
166, 18	la superficie	il volume
167, 16	(11)	(12)
170, 21 e 23	XXI	XI
179, 21	$6n-1$	$6(n-1)$
186, 11	$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right.$	$t\left(\frac{\partial}{\partial z}\right.$
" 18	$R\cos\Psi^*_{t'}$	$\cos\Psi^*_{t'}$
189, 10	a	a^2
192, 10 e 12	$4\xi_{u-u',\,v-v'}$	$\frac{1}{a^2}\xi_{u-u',\,v-v'}$
219, 18	$6g^2-R^2$	$(6g^2-R^2)R^2$

247, 20	$E = -\frac{c}{2\pi l}(2al + k^2\theta)$.	$E = -\frac{c}{\pi}(a + R\theta)$
» 23	$\gamma = -\frac{2al + k^2\theta}{2\pi l}$	$\gamma = -\frac{a + R\theta}{\pi}$
219, 15	4π	2π
321 2	$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x}$	$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x'}$
» 3	$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y}$	$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y'}$
» 4	$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z}$	$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z'}$
328, 12	$\int_S$	$\Sigma \int_S$